ملخص مادة الرياضيات

مراجعة عامة للمبادئ الرياضية و الجبرية

مجموعات الاعداد :

تنقسم الاعداد الى
١ - الاعداد الطبيعية {١ ،٢ ،٣ ، ٠٠٠٠٠٠ }
حيث يمثل العدد ١ وحدة قياس بينما الارقام الاخرة تدل على تكرار هذه الوحدة

٢ - الاعداد الصحيحة {٠٠٠٠، ٣، ٢، ١، ٠،-١،-٢،-٣، ٠٠٠٠ }
الاعداد الصحيحة عبارة عن الاعداد الطبيعية مضاف اليها الصفر ونفس الاعداد الطبيعية مسبوقة باشارة سالبة

٣ - الاعداد النسبية (القياسية) { أ/ب ، أ ، ب اعداد صحيحة و ب ≠ صفر}
وهى عبارة عن النسبة بين عددين صحيحين بحيث يكون المقام لا يساوي صفر (٣/٤ ، -٥/٧، ١/٩) وتعبر الاعداد النسبية عن الظواهر القابلة للتجزيء

القيمة المطلقة لعدد ما(مقياس العدد):
القيمة المطلقة لأي عدد هى قيمة العدد بدون النظر الى الاشارة التى تسبق العدد ويرمز للقيمة المطلقة عدد س بالرمز | س | فمثلا |-٥|= ٥ ، |-٣/٧|

٤ - الاعداد الحقيقية :

هي اي عدد لا يمكن كتابتة على صورة عدد قياسي مثل $\sqrt{2}$ او $\sqrt[3]{4}$

العمليات الجبرية:

حاصل جمع المقادير الجبرية ذات الحد الواحد:

حاصل جمع مقدارين او اكثر (متشابهة فى الرموز الجبرية) يساوي حاصل جمع المعاملات العددية متبوعة بالرموز الجبرية

قاعدة الاشارات :
١ - عند جمع أعداد متشابة فى الاشارات نجمع القيمة العددية لهذة الاعداد ثم نسبقها بالاشارة التى اتحدوا فيها (-٧) + (- ٨) = -١٥

٢ - عند جمع عددين مختلفين فى الاشارة نطرح القيمة العددية ثم نسبق ناتج الطرح باشارة العدد الاكبر (-٧) +(٥) = -٢

٣- عند جمع اكثر من عددين مختلفين فى الاشارات نجمع الاعداد الموجبة ثم نجمع الاعدد السالبة ونأخذ الفرق بين الناتجين السابقين باشارة اكبرهما

(١) + (٦) + (-٩) + (٣) + (-٢)=(١٢)+(-١١) = ١

ملاحظة : الترتيب فى الجمع ليس لة اهمية حيث

س + ص = ص + ع ، (س + ص) + ع = س + (ص +ع)

مثال:- أوجد ناتج

٢س -٥س +س +٦س= ٤س

٩س ص +٣ س ص -٧س ص = ٥س ص

حاصل جمع المقادير الجبرية كثيرةالحدود:

٢س +٤ص -٣ع

مقدار جبري كثير الحدود

٢س

الحد الاول

٤ص

الحد الثانى

-٣ع

الحد الثالث

حيث ٢ هو معامل الحد الاول و ٤ هو معامل الحد الثانى و -٣ معامل الحد الثالث

لأيجاد حاصل جمع مقدارين (أو اكثر) جبريين كثيري الحدود ناخذ المثال التالي

مثال:- أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية كثيرة الحدود التالية

٢س + ٤ص -٣ع و -٤س -٥ع + ٢ص و ٦ ع + ٧س - ٨ ص

الحل:

نكتب المقدار الجبري الاول ثم نكتب المقدار الجبري الثانى ثم الثالث بعد ترتيب حدوده بحيث تقع الحدود المتشابة الرموز تحت بعضها على الصورة التالي

نطبق عملية الجمع التى سبق الاشارة اليها فى جمع المقادير الجبرية ذات الحد الواحد فنحصل على

٢س + ٤ص -٣ع

-٤س + ٢ص -٥ع

٧س - ٨ ص +٦ع

٥س – ٢ص - ٢ ع

مثال:- أوجد الناتج النهائى للعملية التالية

٢س -٣ص +٢ع -٥س -٣ع +٤ص -٤ع -٦ص +٨س = ٥س -٥ص -٥ع

مثال:- أوجد الناتج النهائى للعملية التالية

(٤أ^{٢} +٢ أب + ب^{٢}) - (-٢أ^{٢}+ أب -٣ ب^{٢})

الحل:

(٤أ^{٢} +٢ أب + ب^{٢}) - (-٢أ^{٢}+ أب -٣ ب^{٢})= ٤أ^{٢}+٢ أب +ب^{٢}+٢أ^{٢}-أب+٣ ب^{٢}

= ٤أ^{٢}+٢أ^{٢}+٢ أب- أب + ب^{٢}+٣ ب^{٢}

= ٦ أ^{٢}+ أب+٤ ب^{٢}

حاصل ضرب المقادير الجبرية ذات الحد الواحد:

قاعدة الاشارات:

١- عند ضرب عددين متحدين فى الاشارة يكون الجواب مقدارا موجبا دائما

٢- عند ضرب عددين مختلفين فى الاشارة يكون الجواب مقدارا سالبا دائما

٣- عند ضرب أكثر من عددين مختلفين فى الاشارات يكون الجواب موجبا اذا كان عدد الاشارات السالبة زوجيا و يكون الجواب سالبا اذا كان عدد الاشارات السالبة فرديا.

+	×	+	=	+
-	×	-	=	+
+	×	-	=	-
-	×	+	=	-

٥ × ٦ =٣٠   -٥ × ٦= -٣٠

-٥ × -٦= ٣٠   ٥ × -٦= -٣٠

الخاصية	النص	مثال
تبادل الحدود	س × ص = ص × س	٣×٥=٥×٣=١٥
ترتيب الحدود	(س×ص) ×ع=س× (ص×ع)	(٣×٥) ×٢= ٣×(٥×٢)=٣٠
توزيع الحدود	س×(ص+ع)=س ×ص+س× ع	٣(٥+٢)=٣×٥+٣×٢=٢١

مثال:- أوجد ناتج

٢س (ص –ع)+٣س ص +٦س ع = ٢س ص -٢س ع +٣س ص +٦س ع

= ٥س ص +٤س ع

حاصل ضرب مقدارين جبريين كثيرى الحدود:

لكي نضرب ٢+٣س فى ص-٤ نتبع الخطوات التالية

(١) نضرب ٢ فى المقدار ص-٤

(٢) نضرب ٣س فى المقدار ص-٤

(٣) نجمع معاملات الحدود المتشابها

٢

(٢+٣س) (ص-٤) =٢ص -٨ +٣س ص -١٢س

(٢س+٣) (٥ص+٢ع-٦) = ١٠س ص +٤س ع -١٢س+١٥ص+٦ع-١٨

(٣س^{٢}+٥) (-٤ص+١)= -١٢س^{٢} ص +٣س^{٢} -٢٠ص +٥

تعريف:-
فـى المقـدار الجبـري س^{ن} نـسمي س بالاسـاس و نـسمي ن بـالاس او القـوة وبنـاء علـى هـذا فاذاكانت م و ن اعداد صحصحة فان حاصل ضرب س^{ن} ×س^{م} = س$^{(ن+م)}$

مثال :

* س^{٣}×س^{٢} = س^{٥}

* ٤س^{٢}ص (س^{٢}+٢س ص ـص^{٣}) = ٤س^{٤}ص+ ٤ س^{٣}ص^{٢}- ٤س^{٢} ص^{٤}

* (٣س+٢ص) (٢س - ص) = ٦س^{٢} -٣س ص +٤س ص -٢ص^{٢}
= ٦س^{٢} +س ص -٢ص^{٢}

مثال : اوجد حاصل ضرب

٤س ـ ٣س ص+٢ص فى ٣س +٣س ص+ ٥ص

الحل:
(٤س ـ ٣س ص+٢ص) (٣س +٣س ص+ ٥ص)

=١٢س^{٢}+١٢س^{٢}ص+٢٠س ص ـ٩س^{٢} ص-٩س^{٢}ص^{٢}-١٥س ص٢ +٦س ص+٦س ص^{٢}+١٠ص^{٢}

=١٢س^{٢}+٣س^{٢}ص+١٤س ص-٩س^{٢}ص^{٢}-٩س ص^{٢}+١٠ ص^{٢}

<u>خارج قسمة المقادير الجبرية ذات الحد الواحد:</u>

قاعدة الاشارات:

+	÷	+	=	+
-	÷	-	=	+
+	÷	-	=	-
-	÷	+	=	-

اذا كان $\frac{س}{ص}$ = ب فأن ص ب = س و ص ≠ صفر حيث القسمة على صفر غيرمعرفة او (غير معينة)

قاعدة: اذا كانت م و ن عددين صحيحين و كانت م > ن (م اكبر من ن) فان $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

لاحظ اذا كانت م = ن فان $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-م} = س^{٠} = 1$

مثال:-

$ص^{٩} \div ص^{٤} = ص^{(٩-٤)} = ص^{٥}$

$$\frac{١٢ س^{٤} ص^{٦}}{٣ س^{٢} ص^{٣}} = \frac{١٢}{٣} \quad \frac{س^{٤}}{س^{٢}} \quad \frac{ص^{٦}}{ص^{٣}} = ٤ س^{٢} ص^{٣}$$

خارج قسمة مقدار جبرى كثير الحدود على مقدار جبرى ذو حد واحد

نظرا لأن

$$\frac{س + ص + ع + ...}{ن} = \frac{1}{ن}(س + ص + ع + ...)$$

فباستخدام قاعدة توزيع الحدود نجد ان:

$$\frac{س + ص + ع + ...}{ن} = \frac{س}{ن} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{ن} + ...$$

مثال: اوجد خارج قسمة $4س^{3}ص^{7} + 9س^{5}ص^{4} + 12س^{8}ص^{3}$ **على** $3س^{3}ص^{2}$

الحل:

$$\frac{4س^{3}ص^{7} + 9س^{5}ص^{4} + 12س^{8}ص^{3}}{3س^{3}ص^{2}} = \frac{4س^{3}ص^{7}}{3س^{3}ص^{2}} + \frac{9س^{5}ص^{4}}{3س^{3}ص^{2}} + \frac{12س^{8}ص^{3}}{3س^{3}ص^{2}}$$

$$= \frac{3}{4} ص^{5} + 3س^{2}ص^{2} + 4س^{5}ص$$

خارج قسمة مقدار جبرى كثير الحدود على اخر من نفس النوع:

يمكن توضيح طريقة قسمة مقدار كثير حدود على اخر كثير حدود من خلال المثال التالى

اوجد خارج قسمة $٣س^{٥} + ٢س^{٤} - ٢٠س^{٣} + ١٨س^{٢} - ٧س - ١٢$ **على** $٣س^{٢} - ٤س - ٣$

نكتب المقدار المقسوم و المقدار المقسوم عليه بعد ترتيبهم تنازليا من الاس الاكبر الى الصغر كما فى المثال التالى.

نقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه

نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ثم نطرحة من المقسوم

5

ثم نكرر تلك الخطوات

$$\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٤$$

$$٣\text{س}^{٢}-٤\text{س}-٣ \;\big/\; ٣\text{س}^{٥}+٢\text{س}^{٤}-٢٠\text{س}^{٣}+١٨\text{س}^{٢}-٧\text{س}-١٢$$

$$٣\text{س}^{٥}-٤\text{س}^{٤}-٣\text{س}^{٣}$$

$$٦\text{س}^{٤}-١٧\text{س}^{٣}+١٨\text{س}^{٢}-٧\text{س}-١٢$$

$$٦\text{س}^{٤}-٨\text{س}^{٣}-٦\text{س}^{٢}$$

$$-٩\text{س}^{٣}+٢٤\text{س}^{٢}-٧\text{س}-١٢$$

$$-٩\text{س}^{٣}+١٢\text{س}^{٢}+٩\text{س}$$

$$١٢\text{س}^{٢}+٩\text{س}-١٢$$

$$١٢\text{س}^{٢}+٩\text{س}-١٢$$

....

وبذلك يكون ناتج القسمة $\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٤$

مثال:- أقسم $\text{س}^{٣}-٦\text{س}-٤$ على $\text{س}+٢$

الحل:

$$\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٤$$

$$\text{س}+٢ \;\big/\; \text{س}^{٣}-٦\text{س}-٤$$

$$\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}$$

$$-٢\text{س}^{٢}-٦\text{س}-٤$$

$$-٢\text{س}^{٢}-٤\text{س}$$

$$-٢\text{س}-٤$$

$$-٢\text{س}-٤$$

صفر

اذا $\dfrac{\text{س}^{٣}-٦\text{س}-٤}{\text{س}+٢} = \text{س}^{٢}-٢\text{س}-٤$

تمارين

التمرين الاول: ضع علامة ✓ امام العبارة الصحيحة وعلامة × امام العبارة الخطأ

(١) $\dfrac{4\text{س}^{6}\text{ص}^{3}}{\text{س}^{4}\text{ص}} = 4\text{س}^{2}\text{ص}^{2}$

(٢) $\dfrac{12\text{أ}^{4}\text{ب}^{2}}{6\text{أ}^{2}\text{ب}} = 2\text{أ}^{2}\text{ب}$

(٦)

(٣) $\frac{8\text{م}^{2}\text{ن}^{4}}{6\text{م}^{3}\text{ن}^{2}} = 2\text{م}^{3}\text{ن}^{2}$

(٤) $\frac{6\text{أ}^{6}\text{ب}^{10}\text{ج}}{3\text{أ}^{4}\text{ب}^{5}} = 2\text{أ}^{2}\text{ب}^{2}\text{ج}$

(٥) $\frac{8\text{س}^{7}\text{ص}^{5}\text{ع}}{4\text{س}^{5}\text{ص}^{3}\text{ع}} = 2\text{س}^{2}\text{ص}^{2}$

التمرين الثانى: أجري عمليات القسمة التالية:

(١) $\frac{\text{س}^{2}\text{ص}^{3} + \text{س}^{2}\text{ص}^{2}}{\text{س ص}}$

(٢) $\frac{\text{أ}^{3}\text{ب}^{2}\text{ج}^{3} + \text{أ}^{2}\text{ب}^{3}\text{ج}^{2}}{\text{أ}^{2}\text{ب ج}^{2}}$

(٣) $\frac{\text{س}^{6}\text{ص}^{7}\text{ع} - \text{س}^{7}\text{ص}^{5}\text{ع}^{3}}{\text{س}^{6}\text{ص}^{5}\text{ع}}$

المحاضرة الثانية

التحليل

العامل المشترك:

العامل المشترك لمقدارين جبريين هو المقدار الجبري الذي يقبل كل من المقدارين القسمة عليه بدون باقى.

مثال: اوجد العوامل المشتركة للمقدارين (٤س) ، ($\text{٢س}^{٢}\text{ص}$)

العامل المشترك بين هذان المقداريين هو ١ ، -١، ٢ ،-٢،س،-س،٢س،-٢س

حيث $\frac{4\text{س}}{\text{س}} = 4$ **و** $\frac{2\text{س}^{2}\text{ص}}{\text{س}} = 2\text{س ص}$

$\frac{4\text{س}}{2} = 2\text{س}$ **و** $\frac{2\text{س}^{2}\text{ص}}{2} = \text{س}^{2}\text{ص}$

تعريف:

يقال للمقدار الجبري الذي على الصورة

$\text{أ س}^{\text{ن}} + \text{ب س}^{\text{ن-١}} + \text{ج س}^{\text{ن-٢}} + ... + \text{ل س} + \text{و}$

أ ، ب ، ج ، .... ، ل ، و مقادير ثابتة و أ $\neq$ صفر

كثيرة حدود من الدرجة ن

مثال:

$\text{٤س}^{٣} + \text{٣س}^{٢} - \text{س} + ٥$ (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$\text{٥س}^{٢} + ٣$ (كثيرة حدود من الدرجة الثانية)

تعريف

التحليل: يقال ان كثيرة الحدود من درجة ما قابلة للتحليل اذا امكن اعادة كتابتها كحاصل ضرب لعدة كثيرات حدود اخري كل منها اقل درجة من كثيرة الحدود الاصلية.

مثال:

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = (\text{س}+\text{ص})\ (\text{س}-\text{ص})$

$\text{س}^{٢} + \text{٤س} + ٣ = (\text{س}+١)\ (\text{س}+٣)$

$\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ١ = (\text{س}-١)\ (\text{س}-١)$

طرق التحليل

طريقة الباقى:

سنهتم هنا بتحليل المقدار الثلاثي خاصة (كثيرة الحدود من الدرجة الثانية و التى تحتوي على ثلاث حدود) إذا كان لدينا كثيرة لتحليل حدود من الدرجة الثانية فى (س) نوجد

معاملات الحد المطلق ثم نعوض باي من هذه المعاملات وليكن (أ) فى كثيرة الحدود الاصلية فاذا ساوت الصفر فان كثيرة الحدود تقبل القسمة على (س- أ) بدون باقى. المثال التالى سيوضح الطريقة.

الحد المطلق

مثال:

حلل المقدار الثلاثي $س^{٢} - ١٠س + ٩$

اولا نجد ان عوامل العدد ٩ (الحد المطلق) هى ١، -١، ٣، -٣، ٩، -٩

اذا وضعنا س=١ فى المقدار الثلاثى نلاحظ انه يساوي الصفر

$س^{٢} - ١٠س + ٩ = (١)^{٢} - ١٠(١) + ٩ =$ صفر

اذا (س -١) هو عامل (قاسم) للمقدار الثلاثى

وكذلك اذا وضعنا س=٩ فى المقدار الثلاثى نلاحظ انه يساوي الصفر

$س^{٢} - ١٠س + ٩ = (٩)^{٢} - ١٠(٩) + ٩ =$ صفر

اذا (س -٩) هو عامل (قاسم) للمقدار الثلاثى

اذا يمكن تحليل المقدار الثلاثى $س^{٢} - ١٠س + ٩ =$ (س -١) (س -٩)

مثال:

حلل المقدار الثلاثي س٢+١٣س+٣٦

بنفس الطريقة السابقة نحصل على

س٢+١٣س+٣٦= (س+٩) (س+٤)

تحليل بعض المقادير الخاصة

الفرق بين مربعين:

يقال للمقدار $س^{٢} - ص^{٢}$ انه فرق بين مربعي الكميتين س و ص

ويحلل الى (س-ص)(س+ص)

$(\text{الاول})^{٢} - (\text{الثانى})^{٢} =$ (الاول+ الثانى) (الاول- الثانى)

مثال:

$٢٥س^{٢} - ٩ص^{٢} =$ (٥س+٣ص)(٥س-٣ص)

الفرق بين مكعبين:

يقال للمقدار $س^{٣} - ص^{٣}$ انه فرق بين مكعبي الكميتين س و ص

ويحلل الى $(س - ص)(س^{٢} + س\,ص + ص^{٢})$

$(\text{الاول})^{٣} - (\text{الثانى})^{٣} =$ (الاول- الثانى) (مربع الاول+الاول × الثانى + مربع الثانى)

مثال:

$٦٤ - ص^{٣} = (٤ - ص)(١٦ + ٤ص + ص^{٢})$

مجموع مكعبين:

يقال للمقدار $س^{٣} + ص^{٣}$ انه مجموع مكعبي الكميتين س و ص

ويحلل الى (س+ ص)(س^{٢} - س ص+ ص^{٢})
(الاول)^{٣} + (الثانى)^{٣} = (الاول + الثانى) (مربع الاول- الاول × الثانى + مربع الثانى)

مثال:
س^{٦} + ص^{٦} = (س^{٢}+ ص^{٢})(س^{٤}+ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤})
=(س^{٢}+ ص^{٢})(س^{٢}+ س ص + ص^{٢}) (س^{٢}- س ص + ص^{٢})

ملاحظة: س٢+ ص٢ يسمي مجموع مربعى س و ص ولا يمكن تحليله الى عوامل حقيقة.

تمارين

التمرين الاول: ضع الاشارة الصحيحة فى كل من الاقواس التالية

(١) ٢س^{٢} + ٧ س ص +٣ص^{٢} = (٢س ص)(س ٣ص)

(٢) ٦س^{٢} - ١١ س ص +٣ص^{٢} = (٣س ص)(٢س ٣ص)

(٣) س^{٢} + ٧ س ص +١٢ص^{٢} = (س ٣ص)(س ٤ص)

(٤) ٦م^{٢} + . م ن -٣٥ن^{٢} = (٢م ٥ن)(٣م ٧ن)

التمرين الثانى: حلل المقادير الجبرية التالية الى عواملها الاولية

(١) س^{٣} -٦٤

(٢) ٢٧س^{٣}-١٢٥ص^{٣}

(٣) ٢٧ – س^{٣} ص^{٣}

(٤) ٢٤ب ج^{٤} – ٨١ ب^{٤} ج

التمرين الثالث: حلل كلا مما ياتى الى عوامله الاولية الممكنة

(١) س^{٢} + ١١س +٢٤
(٢) س^{٢} - ١١س +٢٤
(٣) س^{٢} - ٢س -٢٤
(٤) ٣س^{٢} + ٧س +٤
(٥) س^{٢}ص^{٢}- ٩س ص + ٨٤

المحاضرة الثالثة

الاسس و اللوغاريتمات:

الاسس :

اذا كان لدينا المقدار ٤×٤×٤×٤×٤×٤×٤×٤ فانه يمكننا كتابته فى صورة اخري وهى

٤ ° حيث يدعى العدد ٥ بالأس او القوة ويدعى العدد ٤ بالأساس وتنطق أربعة أس خمسة.

وبصورة عامة x^n ترمز لحاصل ضرب العدد "x" فى نفسه "n" من المرات

$\mathbf{x^n = x * x * x * x * x \ldots\ldots}$ (ن) من المرات حيث "x" الأساس و "n" الأس

الأسس الصحيحة الموجبة:

قانون:
أن حاصل ضرب قوتين او اكثر لنفس الأساس يساوي الأساس مرفوعا لحاصل جمع القوي الموجودة. أي أن:

$$\boxed{X^n \times X^m \times \ldots\ldots = X^{n+m+\ldots\ldots}}$$

مثال:- $x^3 * x^2 = x^{2+3} = x^5$

$4^2 * 4^4 = 4^6$

قانون:
أن حاصل قسمة قوتين لهما نفس الأساس يساوي الأساس مرفوعا لحاصل الفرق بين قوي البسط و المقام. أي ان:

$$\boxed{\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}}$$

مثال:- $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

نتيجة:

$$\boxed{x^0 = 1 \ , \ x \neq 0}$$

أي ان أي مقدار عددي او جبري مرفوع الى القوة (الأس) صفر يساوي واحد بشرط أن المقدار العددي أو الجبري نفسه لا يساوي صفر.

قانون:
أن حاصل ضرب كميتين مرفوعتين لقوة ولتكن (n) يساوي الكمية الاولى مرفوعة لتلك القوة مضروبا فى الكمية الثانية مرفوعة لنفس القوة. أي ان:

$$\boxed{(X \times Y)^n = X^n \times Y^n}$$

مثال:- =

$$(3 \times 2)^4 = 3^4 \times 2^4 = 81 \times 16 = 1296$$

$$(a \times b)^5 = a^5 \times b^5$$

قانون:
ناتج قسمة كميتين مختلفتين ومرفوعتين للقوة (n) يساوي البسط مرفوعا للقوة (n) مقسوما على المقام مرفوعا للقوة (n). أي ان:

$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \ , \ y \neq 0}$$

مثال :- $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$

$$\left(\frac{ع}{ص}\right)^4 = \frac{ع^4}{ص^4}$$ حيث ص $\neq$ صفر

قانون:

إذا كانت (x^n) مرفوعة الى القوة (m) فان الناتج هو: $x^{n\times m}$

$$\boxed{(X^n)^m = X^{n\times m}}$$

مثال :- $(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6 = 64$

$(x^3)^7 = x^{3\times7} = x^{21}$

قانون:

إذا كانت $(x^n\ y^m)^c$ مرفوعة الى القوة (c) فان الناتج هو : $x^{nc}\ y^{mc}$

$$\boxed{(X^n\ \ Y^m)^c = X^{nc}\ \ Y^{mc}}$$

مثال:- بسط المقدار التالي

$$\left(\frac{4x^3\ y^2}{5z^4}\right)^3$$

الحل:

$$\left(\frac{4x^3\ y^2}{5z^4}\right)^3 = \frac{(4x^3y^2)^3}{(5z^4)^3} = \frac{4^3(x^3)^3(y^2)^3}{5^3(z^4)^3} = \frac{64x^9y^6}{125z^{12}}$$

القوى الصحيحة السالبة:

تعريف: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

مثال :- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

ملاحظة:
جميع قوانين الاسس الموجبة السابق توضيحها صالحة للاستعمال فى حالة القوي السالبة وسوف نعيد عرضها فى الجدول التالي.

$X^{-n} \times X^{-m} = X^{-n-m}$
$\frac{x^{-n}}{x^{-m}} = x^{-n-(-m)} = x^{m-n}$
$(X \times Y)^{-n} = X^{-n} \times Y^{-n}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \frac{x^{-n}}{y^{-n}} \quad , y \neq 0$
$(X^{-n})^{-m} = X^{-n\times -m} = X^{n\times m}$ م
$(X^{-n} \quad Y^{-m})^{-c} = X^{nc} \quad Y^{mc}$ ع

<u>**تمارين**</u>

بسط المقادير التالية:

١- $٢^{٤}\times٢^{٢}$

٢- $3^3\times3^5$

٣- $\frac{8^6}{8^4}$

٤- $(4^2)^3$

٥- $(2^2\times3^2)^{٢}$

٦- $\left(\frac{5^0}{4^3}\right)^2$

٧- $\frac{a^2b^6c^6}{a^3b^8c^7}$

٨- $2x^3\,y\,z\,(x^2y^2)^3$

المحاضرة الرابعة

الاسس و اللوغاريتمات:

اللوغاريتمات:

تعرفنا سابقا ان $4\times4\times4=64$ واستعملنا التعبير الاتى اختصارا لذلك $4^3=64$ حيث يدعى العدد ٤ بالأساس ويدعى العدد ٣ بالأس. فى هذه الحالة يجب ملاحظة انه كلما كبر الأس أو القوة كلما زادت الصعوبة فى ايجاد القيمة العددية للمقدار.

الان سوف نعبر عن هذه العلاقة يطريقة اخري تدعى باللوغاريتمات فنستطيع القول لوغاريتم العدد ٦٤ بالنسبه للاساس ٤ يساوي القوة ٣ ونكتبها $\text{Log}_4 64=3$ وتقراء لوغاريتم العدد ٦٤ للأساس ٤ يساوي ٣.

تعريف: اذا كان $\boxed{b=a^x}$

فان $\boxed{\log_a b = x}$

مثال: بما ان $8=2^3$ فان $\log_2 8=3$

بما ان $9=3^2$ فان $\log_3 9=2$

بما ان $4=(16)^{0.5}$ فان $\log_{16} 4=0.5$

بما ان $625=5^4$ فان $\log_5 625=4$

من التعريف السابق للوغاريتم نلاحظ ان هناك ثلاث مجاهيل وهى a,b,x اذا علمنا اثنين منها كان بمقدورنا ايجاد قيمة المجهول الثالث.

مثال : اوجد قيمة العدد x فى المعادلات التالية

١- $\log_2 4=x$

نكتب المعادلة السابقة فى الصورة الاسية $2^x=4$

اي ان $2^x=2^2$ نلاحظ ان الاساسات تشابهت ومن ثم تتساوي الاسس $x=2$

٢- $\log_4(1/16)=x$

نكتب المعادلة السابقة فى الصورة الاسية $4^x=\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}=4^{-2}$

اذا $x=-2$

مثال : اوجد قيمة العدد a فى المعادلات اللوغاريتمية التالية

أ) $\log_a 125=3$

نكتب المعادلة اللوغاريتمية السابقة فى صورة اسية فنحصل على

$a^3=125=5^3$

بما ان الاسس متساوية فيكون الاساسات متساوية

اذا $a=5$

ب) $\log_a 8=3$

من تعريف اللوغاريتم نحصل على المعادلة الاسيه التالية

$a^3=8=2^3$

اذا $a=2$

نتائج:

النتيجة الاولى $\boxed{\log_b b = 1}$

النتيجة الثانية $\boxed{\log_b 1 = 0}$

قوانين اللوغاريتمات

١- لوغاريتم حاصل ضرب عددين او اكثر لأساس معين يساوي مجموع لوغاريتمات كل منهم لنفس الاساس.

$$\log_a(XYZ) = \log_a X + \log_a Y + \log_a Z$$

٢- لوغاريتم خارج قسمة عدد على اخر لأساس معين يساوي لوغاريتم البسط مطروحا منه لوغاريتم المقام لنفس الاساس.

$$\log_a\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_a X - \log_a Y$$

٣- لوغاريتم عدد مرفوع لقوة ما يساوي حاصل ضرب تلك القوة فى لوغاريتم العدد.

$$\log_a(X)^n = n\log_a X$$

٤- ل

٥- اتلا

مثال: اذا علمنا ان $5^6=15625$ ، $5^3=125$ ، $5^4=625$

اوجد

١) $\log_5(15625\times125)$

$$\log_5\left(\frac{15625}{125}\right)$$ ٢)

$$\log_5\left(\frac{15625}{125}\right)^4$$ ٣)

الحل:

١) $\log_5(15625\times125) = \log_5 15625 + \log_5 125$
$= 6 + 3 = 9$

٢) $$\log_5\left(\frac{15625}{125}\right) = \log_5 15625 - \log_5 125 = 6 - 3 = 3$$

٣) $$\log_5\left(\frac{15625}{125}\right)^4 = 4\log_5\left(\frac{15625}{125}\right) = 4(\log_5 15625 - \log_5 125)$$
$$= 4(6-3) = 4\times 3 = 12$$

تمارين

١-املأ الفراغات التالية

بما ان $2^4=16$ اذا $\log_2 ١٦ =$ ....

بما ان $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ اذا $\log_9 3 =$ ....

بما ان $\log_{10} 100 = 2$ اذا ١٠٠ = ...

بما ان $\log_5 a = 4$ اذا $a = (.......)^٤$

٢- اوجد قيمه المجاهيل

$\text{Log}_3 9 = x$ $\quad$ $\text{Log}_5 125 = x$ $\quad$ $\text{Log}_a 36 = 2$

$\text{Log}_a 256 = 4$

٣- اذا كان

$\log_2 16 = 4$, $\log_2 64 = 6$, $\log_2 256 = 8$, $\log_2 2048 = 11$

$\log_2 8192 = 13$, $\log_2 65536 = 16$

اوجد قيمه كل من

$$\log_2(265 \times 8192)$$
$$\log_2(65536 \times 16)$$
$$\log_2\left(\frac{8192}{2048}\right)$$
$$\log_2(64)^5$$

11

المحاضرة الخامسه

التباديل:

أذا أردنا أختيار مجموعة من الاشياء المختلفة من بين مجموعة اكبر. فانه يمكننا ان نجري هذا الاختيار بعديد من الطرق. كل طريقة من هذه الطرق تسمي تبديلة ومجموع هذه الطرق جميعا يطلق عليها تباديل. فمثلا

اذا كانت لدينا اندية الاهلي – النصر – الاتحاد و نريد عمل التبديلات الممكنه للمباريات بين هذه المجموعة فاننا نجد ما يلي:

كما نعلم تكون المبارة بين فريقين فقط.

الاهلى- النصر ، الاهلى – الاتحاد

النصر- الاهلى ، النصر – الاتحاد

الاتحاد – الاهلي ، الاتحاد – النصر

فلدينا هنا ٣ فرق ونريد تبديلها عن طريق ٢ فتكتب $p_2^3 = 3 \times 2 = 6$

مثال:

ما هى الطرق المختلفة لشغل ثلاث مقاعد باختيار ثلاثة اشخاص من بين ٤ اشخاص.

الحل:

لنرمز للاشخاص بالرموز a ، b ، c ، d

يمكننا شغل المقعد الاول بواسطة اي من a او b أو بواسطة c أو بواسطة d أي ان هناك اربعة طرق لشغل المقعد الاول بعد شغل المقعد الاول يتبقى ثلاث اشخاص ويكون هناك ثلاث طرق لشغل المقعد الثانى بعد ذلك يتبقى شخصان ومقعد واحد وتكون طرق شغل هذا المقعد الاخير طريقتان.

ومن ثم تكون عدد الطرق التى حصلنا عليها لشغل المقاعد = ٤×٣×٢= ٢٤

وهي عبارة عن $p_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

تعريف:

عدد طرق اختيار r فرد من بين n فرد ، مع اخذ جميع الترتيبات المختلفة فى الاعتبار هو p_r^n حيث

$$p_r^n = n \times (n-1) \times (n-2).......(n-r+1)$$

نتيجة:

الطرق المختلفة لاختيار جميع الافراد هو p_n^n

$$p_n^n = n \times (n-1) \times (n-2).......3 \times 2 \times 1$$

تعريف:

يطلق على حاصل ضرب جميع الاعداد الصحيحة الموجبة المبتدأه بالواحد الصحيح والمنتهيه بالعدد الموجب الصحيح n بمضروب n ويرمز له بالرمز !n

أي ان مضروب n =!n

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2).............3 \times 2 \times 1$$

مثلا:

١!=1
2!=2×1
3!=3×2×1
4!=4×3×2×1

ملاحظة : يعرف مضروب ٠ مساويا الواحد الصحيح اي ان
صفر! =١

نتيجة:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: ما عدد طرق سحب كرتين من بين ثلاث كرات بدون ارجاع؟

الحل:

عدد الكرات الكلى =٣

عدد الكرات المسحوبه = ٢

فيكون عدد الطرق =

$$p_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times 2\times 1}{1!} = 6$$

مثال:كم طريقة يمكن لأربعة اشخاص الجلوس على ٥ كراسي بحيث يجلس اثنان متجاورين؟

الحل: نعتبر ان الشخصين المتجاورين شخصا واحد فيكون الحال هو اختيار ٣ كراسي من بين ٤ فلذا يكون عدد الطرق هو

$$p_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{1!} = 24$$

ولكن هذين الشخصين ليسا شخصا واحدا فلذا لهم طرق شغل المقعدين هى

$$p_2^2 = 2! = 2$$

ويكون عدد الطرق المطلوب =

$$p_3^4 \times p_2^2 = 24\times 2 = 48$$ طريقة

نتيجة:
إذا كان لدينا n من المفردات منها n_1 من المفردات متشابه تماما فيما بينها و n2 من المفردات متشابه تماما فيما و هكذا

بحيث ان : $n=n_1+n_2+..........$ فيكون

عدد طرق الترتيب المختلفة = $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times.........}$

مثال: ما عدد الارقام المختلفة التى يمكن تكوينها من مكونات الرقم ٩٩٥٨٩٥؟

الحل:
عدد خانات العدد هم ٦ خانات يوجد بينها ٩ مكرر ٣ مرات و ٥ مكرر مرتان و ٨ مرة واحدة

اذا $n=6 \quad , \quad n_1=3 \quad , \quad n_2=2 \quad , \quad n_3=1$

اذا عدد الطرق المختلفة =

$$\frac{6!}{(3!)\times(2!)\times(1!)}=\frac{720}{12}=60$$ طريقة

أي ٦٠ رقم مختلف يمكن تكوينها من هذا الرقم.

تمارين

١- ما هى عدد طرق ترتيب ٣ أفراد على خمس كراسي؟
٢- ما هو عدد الارقام المختلفة التى يمكن تكوينها من مكونات الرقم ٣٣٥٦٧٣٥؟

التوافيق:

اذا كنا نريد اختيار r شخص من بين n فرد بدون النظر الى الترتيب فيطلق على هذا العدد توافيق r من n ويرمز لـه بـالرمز c_r^n ومـن الواضـح انـه يجب ان تكون علاقه بين التباديل p_r^n حيث نختار (اختيارا مرتبا) و c_r^n اذ لا اهميـة لترتيب الاختيار. وهذه العلاقه دون الدخول الى كيفية الحصول عليها تتمثل فى ان

$$p_r^n = c_r^n \times r!$$

وبتالى فإن

$$c_r^n = \frac{p_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار ٤ أفراد من بين عشرة للذهاب الى رحلة؟

الحل:عدد الطرق هو c_4^{10}

$$c_4^{10} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\times 6!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = 210$$ طريقة

مثال: يراد تكوين مجلس من ٣ طلاب و استاذين من بين ٢٠ طالب و ٥ اساتذة فما هي عدد الطرق الممكنة لتكوين المجلس؟

الحل:

عدد طرق اختيار الطلبه

$$c_3^{20} = \frac{20\,!}{3!\times 17\,!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140$$ طريقه

عدد طرق اختيار الاساتذة

$$c_2^5 = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$$ طريقة

عدد طرق اختيار الفريق هى

$$c_2^5 \times c_3^{20} = ١١٤٠ \times ١٠ = ١١٤٠٠$$ طريقة

مثال: احسب قيمة c_3^5 و c_2^5 وقارن بينهما

الحل:

$$c_3^5 = \frac{5!}{3!\times(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} = 10$$

$$c_2^5 = \frac{5!}{2!\times(5-2)!} = \frac{5\times4\times3!}{2!\times3!} = 10$$

اي ان $c_2^5 = c_3^5$

نتائج:

(١) $c_r^n = c_{n-r}^n$

كما ان

(٢) $c_0^n = 1$ و $c_n^n = 1$

(٣) $c_1^n = c_{n-1}^n = n$

(٤) $c_r^{n+1} = c_{r-1}^n + c_r^n$

(٥) $$\frac{c_r^n}{c_{r-1}^n} = \frac{n-r+1}{r}$$

تمارين

١- ما هى عدد طرق اختيار ٥ أفراد من ١٠ للذهاب الى رحلة؟

٢- أذا توافر عشرة لاعبين لكرة سلة فكم فريقا من خمسة لاعبين يمكن تشكيلة اذا امكن لكل لاعب ان يقوم باي دور يوكل إليه؟

٣- اشتريت مرجعا من خمسة اجزاء وعلى رف من رفوف مكتبتك فى المنزل لا يوجد الا ثلاث امكنة بكم طريقة يمكنك اختيار ثلاثة منها لوضعها على رف المكتبة؟

المحاضرة السادسة

نظرية ذات الحدين

ان المقدار $x+y$ يتألف من حدين وما سنهتم به هو مفكوك المقدار $(x+y)^n$
حيث n تنتمي لمجموعة الاعداد الطبيعية.
سبق وان عرفنا ان

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

حيث يسمي الطرف الايمن بمفكوك المقدار $(x+y)^2$ و بالمثل ممكن الحصول على مفكوك المقدار $(x+y)^3$ حيث

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

ويمكن وضع الطرف الايمن على صياغة اخري

$$(x+y)^3 = x^{3-0}\,y^0 + \frac{3}{1}x^{3-1}y^1 + \frac{3\times(3-1)}{2\times1}x^{3-2}y^2 + \frac{3\times(3-1)\times(3-2)}{3\times2\times1}x^{3-3}y^3$$

$$= x^3\,y^0 + \frac{3}{1!}x^{3-1}y + \frac{3\times(3-1)}{2!}x^{3-2}y^2 + \frac{3\times(3-1)\times(3-2)}{3!}x^0y^3$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن الحصول على مفكوك $(x+y)^4$

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

[redacted]

[redacted]

وعموما فان الصورة العامه لمفكوك مجموع حدين x و y مرفوعا الى القوة n (عدد صحيح موجب)هو.

[redacted]

ويكون الحد العام على صورة

$$H_{r+1} = c_r^n \; x^{n-r} y^r$$

مثال: اوجد مفكوك $(x+y)^{٥}$ بستخدام الصيغة العامة

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^{5-1}y + \frac{5(5-1)}{2!}x^{5-2}y^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}x^{5-3}y^3 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!}x^{5-4}y^4 + y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

مثال: اوجد الحد السادس فى مفكوك $(x+y)^{٨}$ بستخدام صيغة الحد العام

N=8 **r+1=6** $\longrightarrow$ **r =5**

$$H_6 = H_{5+1} = c_5^8 \; x^{8-5}y^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!}x^3y^5 = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3!}x^3y^5$$

$$= 56x^3y^5$$

$٥٦x^3y^{٥}$

هو الحد السادس من حدود المفكوك $(x+y)^{٨}$

مثال: اوجد مفكوك $(x-١)^{٧}$ بستخدام الصيغة العامة

$$(x-1)^7 = x^7 + 7x^6(-1) + \frac{7\times6}{2}x^5(-1)^2 + \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}x^4(-1)^3 + \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}x^3(-1)^4 + \frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1}x^2(-1)^5 + \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2}{6\times5\times4\times3\times2\times1}x(-1)^6 + (-1)^7$$

$$(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$$

تعريف:

القيمة المطلقة لاي عدد حقيقى موجبا كان ام سالبا هى قيمة موجبة ويرمز للقيمة المطلقة بـ |x| حيث ٥=|٥| ، ٥ =|-٥|

ملاحظة:

اذا كان n عدد صحيح سالب أو كسر موجب أو سالب فإن المفكوك صحيح ولكن بشرط ان القيمة المطلقة للعدد y اقل من x اي x > |y| ويكون فى هذه الحالة المفكوك يحتوي على عدد لانهائى من الحدود.

مثال:

اذا كانت |x| > ١ اوجد مفكوك: $(1+x)^{-2}$

$$(1+x)^{-2}==1+(-2)x+\frac{(-2)(-2-1)}{2\times1}x^2+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3\times2\times1}x^3+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)(-2-3)}{4\times3\times2\times1}x^4+.....$$

$$=1+(-2)x+\frac{(-2)(-3)}{2\times1}x^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3\times2\times1}x^3+\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{4\times3\times2\times1}x^4+........$$

$$=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-.........$$

مثال:

اذا كانت |x| > ١ اوجد مفكوك: $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2\times1}x^2+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3\times2\times1}x^3+...........$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-...........$$

تمارين

١ - اوجد الحد السادس فى مفكوك $(x+y)^{١٥}$ (الجواب : $٣٠٠٣\ x^{10}y^5$)

٢ - اوجد الحد الرابع فى مفكوك $(x^2-y^٢)^{11}$ (الجواب : $-١٦٥\ x^{16}y^6$)

٣ - اوجد مفكوك ذات الحدين

$(x+٣)^٤$ ، $(x-٢)^٥$

٤ - اوجد اول اربعة حدود فى مفكوك كل ممايلي

$(١-x)^{-١}$ (الجواب: $1+x+x^2+x^3+x^4+.....$)

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ (الجواب: $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3$)

المحاضرة السابعة

المعادلات الجبرية وطرق حلها

إذا كانت $a_n , a_{(n-1)} , \ldots\ldots, a_1 , a_0$

اعدادا حقيقية فحل المعادلة

$$a_n X^n + a_{(n-1)} X^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 X + a_0 = 0$$

يعنى إيجاد قيم س الحقيقية التى تجعل الطرف الايمن مساويا للصفر. ويطلق على هذه المعادلة.

معادلة من الدرجة ن فى المتغير س.

مثال: المعادلة $4X-1 = 0$

قيم س التى تحققها هى $X=1/4$

مثال: المعادلة $X^2-1 = 0$

قيم س التى تحققها يمكن ايجادها على الوجة التالي

الحل: نحلل الطرف الايسر الى ابسط صورة

$$X^2-1 = (X-1)(X+1) = 0$$

توجد حالتيين تتحقق فيها المعادلة

اما ان $X-1=0$

او $X+1=٠$

أي $X=-١$ أو $X=1$

تعريف جذور المعادلة :

تسمى القيم الحقيقية لـ x التى تحقق

$$a_n X^n + a_{(n-1)} X^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 X + a_0 = 0$$

بجذور المعادلة. فمثلا جذور المعادلة $X^2-1 = 0$ هى كما راينا فى المثال السابق ١ ، ١-

و جذور المعادلة $3X+2 = 0$ هى جذر واحد وهو ٢/٣-

حل المعادلة الخطية:

إذا احتوت المعادلة على القوة الاولى فقط فى المتغيرات سميت المعادلة معادلة خطية.

فمثلا : المعادلة $3X+4=0$ معادلة خطية في المتغير X.

وبالمثل نجد ان المعادلة:

$$a_1X_1+a_2X_2+.......+a_nX_n= C$$

حيث $a_1, a_2, ...,a_n ,C$ ثوابت هي عبارة عن معادلة خطية فى المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$

حل المعادلة الخطية بمجهول واحد

هى التى لاتحتوي على كسور مقامها مجهول قوته اكبر من واحد ويكون فيها أسس الرموز المستعملة هى الوحدة.

فمثلا $3X-4=٥$ و $X+1-\frac{1}{2}(X+2)=\frac{X-2}{3}$ تمثل معادلات خطية من الدرجة الاولى بمجهول واحد.

و الطريقة المتبعة لحل مثل هذه المعادلات تتلخص فى الخطوات التالي:

١ـ نتخلص من الكسور الموجودة فى المعادلة وذلك بضرب طرفى المعادلة فى المقام المشترك الاصغر.

٢ـ اجراء الجمع الجبري للحدود المتشابهة.

٣ـوضع المعادلة فى صورتها القياسية $aX=b$ و a, b مقادير ثابتة

٤ـقسمة طرفى المعادلة على معامل المتغير المراد ايجاد قيمته ومن ثم نحصل على الحل.

مثال: **** $X+5=10$ اوجد قيمة X

لوضع هذه المعادلة على الصورة القياسية نضيف (٥-) الى طرفى المعادلة

$$X+5-5=10-5$$

اذا $X=5$

**** $\frac{X}{5}=3$ اوجد قيمة X

بضرب طرفى المعادلة فى ٥

اذا

$$\frac{X}{5}\times 5=3\times 5$$

$$X=15$$

مثال: حل المعادلة $\frac{3}{2X+3}=\frac{12}{4X+5}$

الحل: نتخلص من الصورة الكسرية بمساواة حاصل ضرب الطرفين لحاصل ضرب الوسطين فنحصل على

$3(4X+5) = 12(2X+3)$

بفك الاقواس نحصل على

١٢X+15 = 24X+36

$12X -24X = 36-15$

$-12X = 21$

$X= 21/-12 = - 7/4$

<u>*حل المعادلة الخطية فى مجهولين:*</u>

المعادلة الخطية فى مجهولين هى التى على الصورة القياسية $aX+bY=C$

حيث a,b,c ثوابت. يجب ملاحظة ان الحل ليس حلا وحيدا. بمعنى انه لكل قيمة من قيم X توجد قيمة للمتغير Y. و المعادلة تمثل خط مستقيم.

مثال: أوجد قيمة Y فى المعادلة $2X+5Y =16$ عندما $X=3$

الحل: نضع المتغير Y فى طرف وباقى المعادلة فى الطرف الثانى اي ان

$$5Y=16-2X$$

فعندما $X=3$ فنحصل على

$$5Y=16-2\times3$$

⁂ $Y=5$

⁂ أحد حلول المعادلة هو $X=3,\ Y=5$

مثال: اوجد قيمة Y فى المعادلة السابقة عندما $X=-2$

الحل: كما سبق نجد ان $5Y=16-2X$

عندما $X=-2$ فاننا نحصل على

$$5Y=16-2\times(-2)$$

⁂ $Y=4$

⁂ حل المعادلة فى هذه الحالة هو $X=-2,Y=4$

أي ان هناك عددا لا نهائيا من الحلول لمثل هذه المعادلة.

حل المعادلات الخطية الانية:

سنعرض فى هذا البند حل المعادلتين الخطيتين فى مجهولين وهو مايعرف بالحل الانى للمعادلات وهو الحل الذي يحقق جميع المعدلات فى نفس الوقت.

المعادلتان $X+Y=2$ ، $X-Y=0$ لهما حل وحيد يحققهما هو $X=1$ ، $Y=1$ وذلك لأننا لو عوضنا بهاتين القيمتين فى المعادلتين لوجدنا انهما تتحققان.

وعموما اذا كان لدينا المعاداتين

$$aX+bY=c \qquad (1)$$

$$dX+eY=f \qquad (2)$$

حيث a,b,c,d,e,f ثوابت فانه يمكننا ان نحصل على قيمة X,Y التى تحقق هاتين المعادلتين ومن ثم نكون قد حصلنا هلى حل للمعادلتين الانيتين.

نتبع فى ذلك طريقة حذف احد المتغيرين. فلحذف Y مثلا نضرب المعادلة (١) فى العدد e ونضرب المعادلة (٢) فى العدد b و بالطرح نحصل على

$$(ae-db)X=ce-fb$$

ومنها نجد ان

$$X=\frac{ce-fb}{ae-db}$$

وتكون X مقدارا محودا اذا كان $(ae-db)\neq 0$

بينما لو حذفنا X بان نضرب (١) فى d ونضرب (٢) فى a ثم نطرح فنحصل على

$$(db-ae)Y=dc-af$$

$$Y=\frac{dc-af}{db-ae}$$

وتكون Y مقدارا محدودا اذا كان $(db-ae)\neq 0$

مثال: اوجد حل المعادلتين

$$2X-3Y=5 \qquad (1)$$

$$X+4Y=-3 \qquad (2)$$

الحل: بضرب المعادلة (١) فى ٤ والمعادلة (٢) فى ٣

$8X-12Y=20$

$3X+12Y=-9$

وبجمع المعادلتين نحصل على $11X=11$

اذا $X=1$ بالتعويض فى احدي المعادلتين نحصل على $Y=-1$

مثال: اوجد حل المعادلتين

$2X+5Y=3 \qquad (1)$

$X-10Y=-1 \qquad (2)$

الحل: بضرب المعادلة (١) فى ٢

$2X+10Y=3$

$X-10Y=-1$

وجمع المعادلتين نحصل على $5X=5$

اذا $X=1$ بالتعويض فى اي من المعادلتين نجد ان $Y=1/5$

تمارين

١- $3X-4 = 5$

2- $3=2X+7$

3- $3(2X-3)=4(3X-2)-13$

٤- $(\frac{1}{X-1})-(\frac{3}{x})=(\frac{5-X}{X(X-1)})$ (الجواب: $X=-2$)

5- $Y=2X+9$, $Y=X+21$ اوجد X , Y

المحاضرة الثامنة

حل معادلات الدرجة الثانية:

معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد هى المعادلة التى يكون فيها اس المتغير المجهول فيها ٢ اي القوة الثانية و الصورة القياسية اهذا النوع من المعادلات هى:

$$aX^2+bX+c=0$$

حيث a,b,c مقادير ثابتة و $a\neq0$

تعتبر المعادلات التالية معادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

$$aX^2+c=0 \quad , \; a\neq 0$$

$$aX^2+bX+c=0 \quad , \; a\neq 0$$

$$aX^2+bX=0 \quad , \; a\neq 0$$

ولحل هذا النوع نجد قيمة X^2 ومن ثم نجد قيمة X وذلك بأيجاد الجذر التربيعى لقيمة X^2

مثال: اوجد حل المعادلة $4X^2$ -٣٦ = ٠

الحل: بنقل الحد المطلق الى الطرف الثانى من المعادلة نحصل على.

$$4X^2=36$$

$$X^2=٩$$

وباخذ الجذر التربيعى لكل من الطرفين نجد ان $X=\pm\sqrt{9}=\pm3$

مثال : اوجد حل المعادلة X^2 -١٦ = ٠

الحل: بنقل الحد المطلق الى الطرف الثانى من المعادلة نحصل على.

$$X^2=16$$

وباخذ الجذر التربيعى لكل من الطرفين نجد ان $X=\pm\sqrt{16}=\pm4$

حل معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد بطريقة التحليل:

يعتمد الحل على ان حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي صف اذا كان احد هذين المقدارين يساوي صفر و العكس صحيح لذا اذا كان

$$(X+3)(5X-2)=0$$

نلاحظ انها مؤلفة من حاصل ضرب قوسين يضم كل منهما مقدار جبري ذي حدين فلابد عندئذ ان يكون احد هذين المقدارين يساوي صفرا ومن هذا يمكن القول

أما $X+3=0$ ومنه $X=-3$ او $5X-2=0$ ومنه $X=2/5$

تتلخص طريقة الحل فى

١- ننقل جميع الحدود التابعة للمعادلة الى الطرف الايسر تاركين القيمة صفر فى الطرف الايمن.

٢- نحلل الطرف الايسر الى عواملة الاولية كلما امكن ذلك.

٣- نساوي كل عامل من عوامل الطرف الايسر للمعادلة بالقيمة صفر ومن ثم نحل المعادلات البسيطة الناتجة.

مثال: حل المعادلة $4X^2-2X=0$

الحل: باخذ العامل المشترك X نحصل على

$X(4X-2)=0$ ومنه نجد ان

أما $X=0$

او $4X-2=0$ ومنه $X=2/4=1/2$

أي ان الجذرين هما ٠ و $1/2$

مثال: حل المعادلة $X^2-4=0$

الحل: نلاحظ ان الطرف الايسر عبارة عن فرق بين مربعين يمكن تحليلة وتصبح المعادلة كالتالى

$$X^2-4=(X+2)(X-2)=0$$

إما $X+2=0$ ومنه $X=-2$

او $X-2=0$ ومنه $X=2$

مثال: حل المعادلة $6X^2+٥X-٤=٠$

الحل: بتحليل الطرف الايسر نحصل على

$$(3X+4)(2X-1)=0$$

نجد انه أما $3X+4=0$ ومنه $X=-4/3$

او $2X-1=0$ ومنه $X=1/2$

ايجاد جذور معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد باستخدام القانون

القانون العام الذي يمكن عن طريقة ايجاد حل اي معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد والتى على الصورة $aX^2+bX+c=0$.

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ملاحظه : تسمي الكمية (b^2-4ac) بالمميز ويرمز اها بالرمز "م" وهذا المميز له ثلاث حالات

(أ) أذا كان $b^2-4ac>٠$ اي مقدار موجب فيكون للمعادلة جذرين حقيقين مختلفين

(ب) أذا كان $b^2-4ac<٠$ اي مقدار سالب فيكون للمعادلة جذرين تخيلين (غير حقيقين)

(ت) أذا كان $b^2-4ac=٠$ فيكون للمعادلة جذرين حقيقين متساوين (اي جذر حقيقى واحد)

مثال: اوجد حل المعادلة $3X^2+4X-4=0$ باستخدام القانون

الحل: بما أن $3X^2+4X-4=0$

أذا $a=3$ ، $b=4$ ، $c=-4$

وبستعمال القانون نجد ان

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\times3\times(-4)}}{2\times3}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-4\pm8}{6}$$

$$=\frac{-4+8}{6}=\frac{2}{3} \quad \text{أو} \quad =\frac{-4-8}{6}=-2$$

<u>تمارين</u>

1- $9X^2-25=0$

2- $16X^2-4=0$

3- $36X^2-25=0$

4- املأ الفراغات التالية

$X^2-2X-8=0$

$(X- \quad)(X+ \quad)=0$

$X=$ او $X=$

5- $X^2+3X-10=0$

6- $X^2-4X=12$

7- $3X^2=X+10$

8- حل المعادلات باستخدام القانون

$9X^2+2=12X$

$X^2+6X+45=0$

$8X=4X^2+13$

المحاضرة التاسعة

المحددات :

الرمز الجبري التالى يقال له محدد ثنائي أو محدد من الرتبة الثانية (لأن عدد الصفوف أو الاعمدة اثنان) ويحتوي على أربعة عناصر وهذا المحدد يعبر عن العدد الحقيقى $a_1b_2-a_2b_1$ حيث

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

مثال : اوجد قيم المحددات التالية

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = ٤\times٣ - ٥\times٧ = -٢٣$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = ١\times٤ - ٥\times٦ = -٢٦$$

استخدام المحددات من الدرجة الثانية فى حل انظمة المعادلات الخطية:

إذا كان لدينا نظام من معادلتين انيتين فى مجهولين X,Y

$$a_1X+b_1Y=c_1$$

$$a_2X+b_2Y=c_2$$

فاننا نسمي الاعداد a_1,a_2,b_1,b_2 المعاملات و العددان c_1,c_2 فيسميان الثوابت

ونسمي $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ محدد المعاملات حيث معاملى المجهول X يكونان العمود الاول ومعاملى المجهول Y يكونان العمود الثانى

واذا استبدلنا العمود الاول a_1,a_2 بالثوابت c_1,c_2 فنحصل على $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ محدد المجهول X

واذا استبدلنا العمود الثانى b_1,b_2 بالثوابت c_1,c_2 فنحصل على $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ محدد المجهول Y

وعند ذلك تكون

$$X = \frac{\text{محدد } X}{\text{محدد المعاملات}} = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$Y = \frac{\text{محدد } Y}{\text{محدد المعاملات}} = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

مثال: حل نظام المعادلات التالى باستخدام المحددات

3X-2Y=0

X+Y= 5

الحل:

محدد المعاملات $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = ٣×١-(-٢)×١=٥

محدد X $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ =٠×١-(-٢)×٥=١٠

محدد Y $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ =٣×٥-٠×١=١٥

اذا X =X محدد المعاملات/محدد= 10/5=2

Y =Y محدد المعاملات/محدد= 15/5=3

المحددات من الرتبه الثالثة:

تعرفنا على محدد الرتبة الثانية وسوف نتعرف الان على محدد الرتبة الثالثة وهو عدد حقيقى يمكن وضعه على الصورة التالية

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

حيث $a_1,a_2,\ldots\ldots,b_1,b_2,\ldots\ldots c_1,c_2,\ldots\ldots$ أعداد حقيقية والعدد الحقيقى الذي يعبر عن M هو

$M= a_1\times$(المحدد الناشئ من حذف الصف والعمود المحتويين على a_1) $- b_1\times$(المحدد الناشئ من حذف الصف والعمود المحتويين على b_1) $+ c_1\times$(المحدد الناشئ من حذف الصف والعمود المحتويين على c_1)

$$M=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال : فك المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{-3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{+4}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5-(-2)-3(-1-4)+4(-1-(-10))=7+15+36=58$$

مثال : فك المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{-2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{+3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

= 1(4-(-2))-2(-1-(-5))+3(-2-20)=6-8-66=-68

ملاحظة : يمكن فك المحدد متبعين نفس القواعد السابقة وذلك عن طريق اي عمود او اي صف فمثلا سوف نفك المحدد السابق باستخدام العمود الاول بدلا من الصف الاول

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{-(-1)}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{+5}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

=1(4-(-2))-(-1)(2-6)+5(-2-12)=6-4-70=-68

خصائص المحددات:

سنسوق الان بعض الخصائص للمحددات

***الخاصية الاولى:* قيمة المحدد تظل كما هى اذا استبدلت الصفوف بالاعمدة و الاعمدة بالصفوف.**

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

يترك للطالب حساب قيمة المحدد فى كل حالة واثبات التساوي

***الخاصية الثانية:* إذا استبدلنا صفا بصف او عمود بعمود فان القيمة العددية للمحدد لاتتغير ولكن تنعكس اشارتها.**

فمثلا:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{21}$$

بينما
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -21$$

و
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -21$$

الخاصية الثالثة: إذا تساوي عمودان (أوصفان) من اعمدة اوصفوف محدد فان قيمة المحدد تساوي صفر

فمثلا:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =1(-15-12)-2(-12-6)+(-3)(8-5) = -27+36-9=0$$

ويمكن للطالب ان يتحقق بفك اي محدد يحتوي على عمودين متماثلين او صفان متماثلين

الخاصية الرابعة : إذا ضربت عناصر صف ما (او عمود ما) من صفوف او اعمدة محدد قيمتة **M** بعدد **k** فان قيمة المحدد الناشئ تساوي **Mk**

فمثلا:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -١٤$$

و
$$\begin{vmatrix} 2\times 2 & 3\times 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = ٢\times -١٤ = -٢٨$$

الخاصية الخامسة : لاتتأثر قيمة محدد اذا أضفنا لصف ما او عمود ما عناصرصف اخر او عمود اخر **k** من المرات.

فمثلا:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -١٤$$

لو اضفنا الصف الثانى الى الاول بعد مضاعفتة تكون النتيجة كتالى

$$\begin{vmatrix} 2+(2\times 4) & 3+(2\times -1) \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$ = -١٠ -٤ = - ١٤

مثال أخر: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = ٢

لو ضربنا الصف الثانى فى 2- واضفناة الى الصف الاول فتكون النتيجة كتالى

$$\begin{vmatrix} 4+(-2\times 2) & 5+(-2\times 3) \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$ = ٠ - (-2) = ٢

تمارين

١- اوجد قيمة المحددات التالية

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

٢- حل المعادلات التالية باستخدام المحددات

2X+3Y+7=0

3X-2Y-5=0

٣- اوجد قيمة X التى تحقق المعادلات التالية

$$\begin{vmatrix} X-1 & 2 \\ 1 & X+1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} X+1 & 1 \\ 2 & X \end{vmatrix} = 0$$

المحاضرة العاشرة

المصفوفات:

تعرف المصفوفة بانها ترتيب من الاعداد على شكل مستطيل يتكون من صفوف وأعمدة بحيث يتساوي عدد العناصر فى كل صف وكل عمود وتحصر جميع العناصر بين قوسين.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

تسمي الاعداد التى تكون تقاطع صفوف واعمدة المصفوفة "عناصر المصفوفة" فمثلا العنصر الذي يقع فى تقاطع الصف الاول مع العمود الثانى هو العدد ٣ بينما العنصر الذي يقع فى تقاطع الصف الثالث و العمود الثانى هو العدد ٢- يمكن ان نرمز لكل عنصر من عناصر المصفوفة باستخدام المتغيرات المزدوجة التذييل مثل a_{12}،b_{23} بحيث الذيل الاول يمثل الصف و الذيل الثانى يمثل العمود

a_{23} : تعنى العنصر الذي يقع فى تقاطع الصف الثانى و العمود الثالث

a_{13} : تعنى العنصر الذي يقع فى تقاطع الصف الاول و العمود الثالث

a_{22} : تعنى العنصر الذي يقع فى تقاطع الصف الثانى و العمود الثانى

وتكتب المصفوفة فى صورة عامة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots\dots\dots a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

تعريف:

تحدد رتبة المصفوفة بعدد صفوفها وعدد أعمدتها فمثلا المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ عدد صفوفها اثنين وعدد أعمدتها اثنين ويقال ان رتبتها هى ٢×٢ وهذه العلامة × هنا لا تعنى الضرب فاذا كان

عدد الصفوف لمصفوفة هو M وعدد الاعمدة N فان رتبة المصفوفة هى $N\times M$ اي عدد الصفوف × عدد الاعمدة

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$ رتبتها ٢×٣

انواع المصفوفات:

المصفوفة المستطيلة:

يقال ان المصفوفة مستطيلة اذا كان عدد الصفوف لايساوي عدد الاعمدة ومثال ذلك

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المربعة:

يقال ان المصفوفة مربعة اذا كان عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة ومثال ذلك

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

فى المصفوفة A يطلق على 2,4 عناصر القطر الرئيسي وبالمثل فان 2,4,1 هي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة B

المصفوفة الصفريه:

يقال ان المصفوفة صفريه اذا كان جميع عناصرها اصفار ويرمز لها بـ ϕ ومثال ذلك

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

للمصفوفة الصفرية نفس اهمية الصفرفى العمليات الحسابية العادية

مصفوفة الوحدة:

وهى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي واحد وباقى عناصرها اصفار ويرمز لها بـ I ومثال ذلك

$$I_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة :تؤدي مصفوفة الوحدة نفس الدور الذي يؤديه الواحد الصحيح فى العمليات الحسابية البسيطة.

العمليات الجبرية على المصفوفات:

من الممكن إجراء العمليات الحسابية على المصفوفات وهى الجمع والطرح والضرب والقسمة ولكن يشترط بعض الشروط لاجراء هذه العمليات.

الجمع:

يمكن جمع مصفوفتين (او أكثر) ولكن بشرط ان تكون للمصفوفتين نفس الرتبة أي ان عدد الصفوف متساو وكذلك عدد الاعمدة متساو.

وتتم عملية الجمع عن طريق جمع كل عنصر من المصفوفة الاولى على العنصر المناظر له فى المصفوفة الثانية.

مثال: هل يمكن جمع المصفوفتين

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل : يمكن جمع هاتين المصفوفتين على النحو التالى

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

مثال: إجمع المصفوفتين

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل :

$$A+B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

مثال: هل يمكن جمع المصفوفتين

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل: لايمكن جمعهما نظرا لاختلاف رتبتهما فالاولى ٣×٢ و الثانية ٢×٢

الطرح:

ويشترط لكى تتم عملية الطرح ان يكون للمصفوفتين نفس الرتبة ويتم طرح كل عنصر من العنصر المناظر له جبريا.

مثال: اوجد A-B

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-1 & 5-2 \\ 3-0 & -1-(-1) & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

مثال: اوجد A-B

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفة فى مقدار ثابت:

يمكن ضرب أي عدد فى مصفوفة مهما كانت رتبتها ويتم الضرب عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى هذا العدد.

مثال: اضرب العدد ٣ فى المصفوفة $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$

الحل: $٣\times B=3\times\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -6\\ 9 & 6\\ 12 & -9\end{pmatrix}$

مثال: اضرب العدد ١/٣ فى المصفوفة $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

الحل: $(١/٣)\times A=1/3\times\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}$

ضرب المصفوفات فى بعضها:

من الممكن ضرب مصفوفة (او اكثر) فى مصفوفة أخري (أو أكثر) بشرط ان يكون عدد أعمدة المصفوفة الاولى مساويا عدد صفوف المصفوفة الثانية.

فاذا كانت المصفوفة الاولي من الرتبة $M\times L$ و المصفوفة الثانية من الرتبة $L\times N$ فان عملية الضرب ممكنة و المصفوفة الناتجة من الرتبة $M\times N$

مثال: هل يمكن ضرب المصفوفتين

$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

الحل : بما ان رتبة المصفوفة A هى ٢×3 ورتبة المصفوفة B هى ٢×٢ اذا الضرب ممكن ومصفوفة الناتج من الرتبة ٢×٣ .

أما طريقة الضرب فنأخذ عناصر الصف الاول فى المصفوفة A ثم نضربها فى العناصر المناظرة فى العمود الاول من المصفوفة B ونجمع الناتج ليكون العنصر الذي فى الصف الاول و العمود الاول من مصفوفة حاصل الضرب ثم نكرر العملية على العمود الثانى من المصفوفة B لنحصل على العنصر الموجود فى الصف الاول و العمود الثانى من مصفوفة حاصل الضرب وهكذا مع جميع اعمدة المصفوفة B حتى نكمل عناصر الصف الاول من مصفوفة حاصل الضرب. نجري

نفس العمليات مع الصف الثانىمن المصفوفة A لتكون عناصر الصف الثانى من مصفوفة حاصل الضرب وهكذا حتى تفرغ من جميع الصفوف من المصفوفة A.

مثال: اذا كان $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

اوجد ناتج حاصل ضرب $A \times B$ و $B \times A$

الحل:

$$A \times B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+3\times 5 & 1\times 1+3\times 3 \\ 2\times 2+4\times 5 & 2\times 1+4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 24 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \times A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1+1\times 2 & 2\times 3+1\times 4 \\ 5\times 1+3\times 2 & 5\times 3+3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

لاحظ ان $A \times B \neq B \times A$

مثال: اذا كان $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

اوجد ناتج حاصل ضرب $A \times B$ و $B \times A$

الحل:

$$A \times B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1+1\times 3 \\ 2\times 1+3\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

لايمكن ايجاد قيمة $B \times A$ حيث عملية الضرب هنا غير معرفة لان عدد اعمدة B لا يساوي عدد صفوف A كما هو موضح فى تعريف شرط ضرب مصفوفتين.

مثال: اذا كان $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

اوجد ناتج حاصل ضرب $A \times B$

الحل:

$$A \times B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times4 & 2\times0 & 2\times2 & 2\times1\\1\times4 & 1\times0 & 1\times2 & 1\times1\\0\times4 & 0\times0 & 0\times2 & 0\times1\\3\times4 & 3\times0 & 3\times2 & 3\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0 & 4 & 2\\4 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\12 & 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

لاحظ ان

$$B \times A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}= ٤\times٢+٠\times١+٢\times٠+١\times٣=١١$$

<u>معكوس (مدور) المصفوف:</u>

يقال ان المصفوفة A هى مدور المصفوفة A' اذا كانت صفوف المصفوفة A هى اعمدة المصفوفة A' و العكس صحيح اي ان أعمدة A' هى صفوف المصفوفة A ومثال ذلك:

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ هي مدور المصفوفة $$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\5 & 0\\4 & 0\end{pmatrix}$$

مثال: اوجد مدور المصفوفة التالية

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\0 & 3 & 9\\6 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\0 & 3 & 5\\7 & 9 & 1\end{pmatrix}$$

تعريف المصفوفة المتماثلة:

يقال ان المصفوفة A متماثلة اذا كان مدور المصفوفة يكافئ المصفوفة نفسها أي ان $A = A'$

مثال: اوجد مدور المصفوفة التالية $$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\0 & 3 & 5\\7 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

الحل: $$A'=\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\0 & 3 & 5\\7 & 5 & 1\end{pmatrix}$$ وهذا يعنى ان المصفوفة A متماثلة

مقلوب (نظير) المصفوفات:

نري أنه لأي عدد حقيقى $a \neq 0$ يوجد عدد a^{-1} يطلق عليه مقلوب (نظير) a بحيث

$$a\,(a^{-1}) = (a^{-1})\,a = 1$$

وهذه الخاصية يمكن تطبيقها على المصفوفات فاذا كانت لدينا مصفوفة مربعة A وأمكن بطريقة ما إيجاد مصفوفة B بحيث ان:

$$AB = BA = I$$

فانه يقال ان B مقلوب المصفوفة A ويرمز لها A^{-1} اي ان $B = A^{-1}$

تعريف محدد المصفوفة:

اذا كانت المصفوفة مربعة فان المحدد الذي عناصرة هى نفس عناصر المصفوفة بنفس الترتيب يطلق عليه محدد المصفوفة.

مثال: قيمة محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ هو $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\times6 - 2\times4 = -2$

خطوات ايجاد مقلوب المصفوفة المربعة:

لإيجاد مقلوب المصفوفة المربعة A فاننا نتبع الخطوات التالية:

١ـ نوجد محدد المصفوفة A.

٢ـ نوجد المصفوفة التى عناصرها هى المحددات المقابلة لعناصر المصفوفة A وتنشاء هذه المحددات بحزف الصف و العمود الذي به العنصر و وضع باقى العناصر فى محدد (اي يوضع بدل كل عنصر من عناصر المصفوفة المحدد المقابل له باشارته وتسمى هذه المصفوفه مصفوفة المحددات)

لاحظ الاشارات التى يتم توزيعها على قيم المحددات فى مصفوفة المحددات تكون كتالي

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

٣ـ نوجد مدور هذه المصفوفة

٤- نضرب هذه المصفوفة فى(محدد A /١) فنحصل على مقلوب المصفوفة A

ولذلك فانه يشترط لوجود مقلوب للمصفوفة ان تكون قيمة محدد المصفوفة لاتساوي الصفر.

مثال: اوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

الحل:

١- نوجد محدد المصفوفة A. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2 - 1\times3 = ١$

٢- نوجد مصفوفة المحددات $B = \begin{pmatrix} +(2) & -(3) \\ -(1) & +(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

٣- نوجد مدور المصفوفة B $B' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

٤- الان نوجد A^{-1} $A^{-1} = \frac{1}{|A|} B' = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

وللتحقيق من ذلك نوجد حاصل ضرب A فى A^{-1}

$$A\times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times2+1\times-3 & 2\times-1+1\times2 \\ 3\times2+2\times-3 & 3\times-1+2\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال: اوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

الحل:

١- نوجد محدد المصفوفة A. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + ٠\times\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$

$$= 2\times(-30)-1\times(12-35)+0=-60+23=-37$$

٢- نوجد مصفوفة المحددات

$$B\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}0 & 5\\6 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 5\\7 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\7 & 6\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\6 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\7 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\7 & 6\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 5\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30 & 23 & 18\\-4 & 8 & -5\\5 & -10 & -3\end{pmatrix}$$

٣- نوجد مدور المصفوفة B

$$B' = \begin{pmatrix}-30 & -4 & 5\\23 & 8 & -10\\18 & -5 & -3\end{pmatrix}$$

٥- الان نوجد A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B' = \frac{1}{-37}\begin{pmatrix}-30 & -4 & 5\\23 & 8 & -10\\18 & -5 & 18\end{pmatrix} =$$

ولنتأكد من ذلك فانه لابد ان يتحقق $A\times A^{-1}=I$

$$A\times A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 0 & 5\\7 & 6 & 4\end{pmatrix}\times\frac{1}{-37}\begin{pmatrix}-30 & -4 & 5\\23 & 8 & -10\\18 & -5 & 18\end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{-37}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 0 & 5\\7 & 6 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-30 & -4 & 5\\23 & 8 & -10\\18 & -5 & 18\end{pmatrix} = \frac{1}{-37}\begin{pmatrix}-37 & 0 & 0\\0 & -37 & 0\\0 & 0 & -37\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

تمارين

اوجد مدور المصفوفات التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

اوجد مقلوب المصفوفات التالية

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

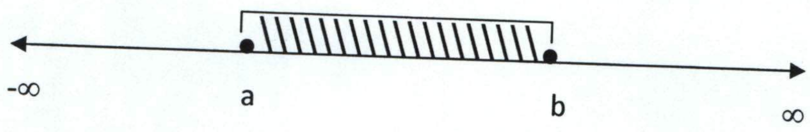
المحاضرة الحادية عشر:

المتباينات والعلاقات:

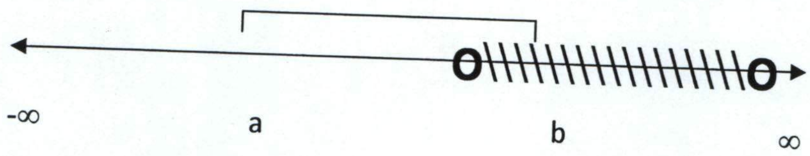
تمهيـــد :

الفترات الحقيقية:
هي المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية وتنقسم إلى قسمين

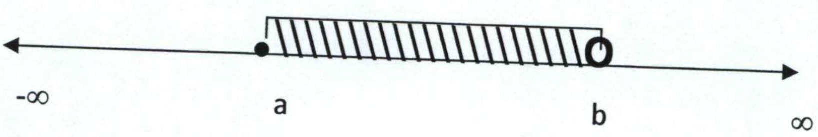
أولاً : الفترات المحدودة
المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : a \leq X \leq b \}$ والتي يرمز لها [a,b] تسمى الفترة المغلقة من a إلى b ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :



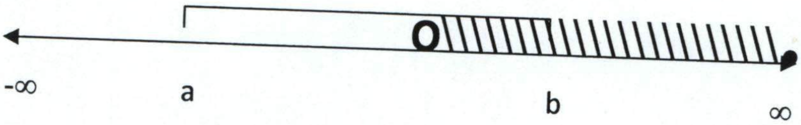
المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : a < X < b \}$ والتي يرمز لها (a,b) تسمى الفترة المفتوحة من a إلى b ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :



المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : a \leq X < b \}$ والتي يرمز لها (a,b] تسمى الفترة نصف المغلقة او نصف المفتوحة من a إلى b ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :

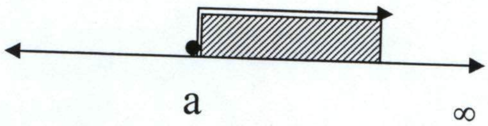


المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : a < X \leq b \}$ والتي يرمز لها] a,b) تسمى الفترة نصف المغلقة او نصف المفتوحة من a إلى b ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :

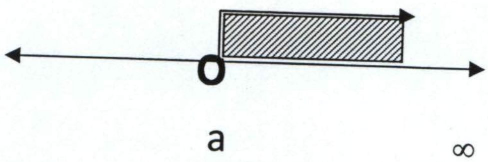


ثانياً : الفترات غير المحدودة

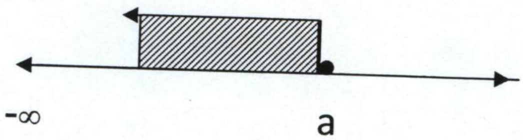
المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : a \leq X \}$ والتي يرمز لها] a,∞) تسمى الفترة نصف المغلقة او نصف المفتوحة من a إلى المالانهاية ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :



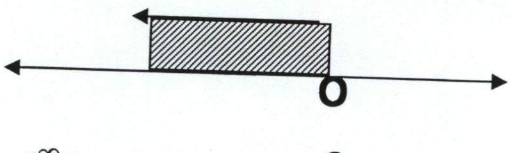
المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : a < X \}$ والتي يرمز لها (a,∞) تسمى الفترة المفتوحة من a إلى المالانهاية ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :



المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : X \leq a \}$ والتي يرمز لها (-∞ , a] تسمى الفترة النصف مغلقة أو النصف مفتوحة من سالب المالانهاية إلى a ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :

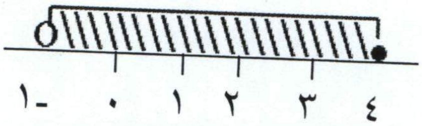


المجموعة الجزئية من الأعداد الحقيقية (R)
$\{ X \in R : X < a \}$ والتي يرمز لها (-∞ , a) تسمى الفترة المفتوحة من سالب المالانهاية إلى a ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما يلي :

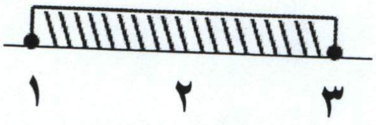


مثال:
مثل الفترات الحقيقية التالية على شكل مجموعة ثم مثلها على خط الأعداد:

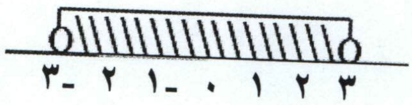
١) [٤ ، ١-) $٤ \ge X > ١-$



٢) [٣ ، ١] $٣ \ge X \ge ١$



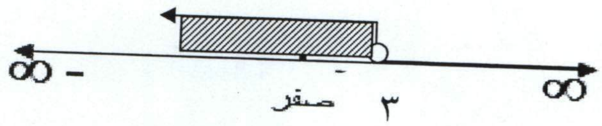
٣) (٣ ، ٣-) $٣ > X > ٣ -$



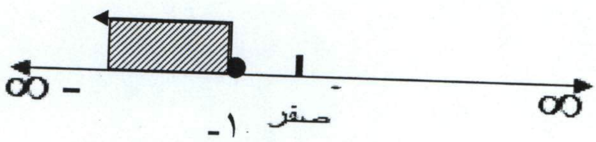
مثال : مثل على خط الأعداد الفترات التالية :-

١- [٥ ، ∞)

٢- (∞- ،٣)



٣- (∞- ، -١]



المتباينات من الدرجة الأولى

المتباينة: هي علاقة تباين بين طرفين يحتويان مجاهيل وأعداد ويكون أحد هذه الأطراف أكبر من الآخر وتوضح ذلك علاقات الأكبر من أو الأصغر من التالية :

العلاقة	معناها
<	**أكبر من**
>	**أصغر من**
≤	**أكبر من أو تساوي**
≥	**أصغر من أو تساوي**

حل المتباينة : هو إيجاد قيم المجاهيل التي تحقق التباين.

ملاحظة. نقول عن متباينتين أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس مجموعة الحل أو نفس فترات الحل.

حل متباينات الدرجة الأولى:

مثال :حل المتباينه التالية

$$3X+1 \geq X-1$$

الحل

$3X+1 \geq X-1$

ننقل المجهول X فى طرف و الحدود المطلقة فى طرف فتكون المتباينة كتالى

$3X-X \geq -1 - 1$

$2X \geq -2$

بقسمة طرفى المتباينة على ٢

اذا $X \geq -1$

إذاً مجموعة حل المتباينة هي $X \geq -1$ (أي جميع الأعداد الأكبر من أو تساوي١-) ونكتب مجموعة الحل على شكل فترة كما يلي [-١ ، ∞).

مثال: اوجد مجموعة الحل للمتباينه

$-4X-3< 1$

الحل:

$-4X-3< 1$

$-4X< 1 +٣$

$-4X< ٤$

(نقسم الطرفين على ٤- ونغير اتجاه المتباينة)

$X > -١$

وهذه هي مجموعة الحل ومجموعة الحل على شكل فترة هي (١- ، ∞)

ملاحظات:

١) لحل متباينات الدرجة الأولى نصنع نفس الطرق التي استخدمناها لحل معادلات الدرجة الأولى بمجهول في الإضافة والطرح والضرب في عدد موجب والقسمة على عدد موجب.

٢) في حالة الضرب والقسمة في عدد سالب نغير اتجاه المتباينة فيتحول الأصغر أكبر والعكس.

٣) في حال شقلبة الطرفين أي جعل المقام بسط والبسط مقام أيضاً نغير اتجاه المتباينة.

٤) مجموعة الحل في ح هي فترات إما محدودة أو غير محدودة لذلك يمكن تمثيلها على خط الأعداد.

مثال: أوجد حل المتباينات التالية ومثلها على خط الأعداد

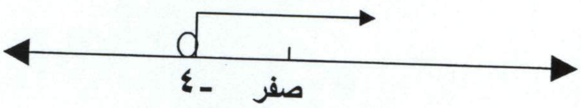
1) $X+1 > -3$

الحل

$X > -3-1$

$X > -4$

إذاً مجموعة الحل هي الفترة (-٤ ، ∞) وتمثل على خط الأعداد كما يلي:



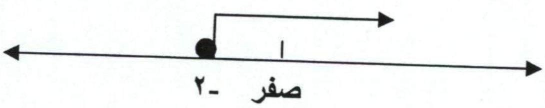
٢) $-2X \leq 4$

الحل: بقسمة طرفي المتباينة على-٢ فتنعكس العلاقة كمايلى

$$\frac{-2}{-2}X \geq \frac{4}{-2}$$

$$X \geq -2$$

إذاً مجموعة الحل هي الفترة [-٢ ، ∞) وتمثل على خط الأعداد كما يلي:

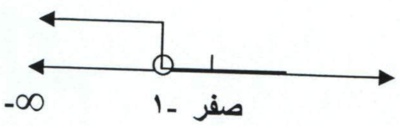


٢) $\frac{X-5}{3} < -2$

الحل: بضرب طرفي المتباينة على ٣

$$X-5 < -6$$
$$X < -6+5$$
$$X < -1$$

إذاً مجموعة الحل هي الفترة (- ١ ، ∞-) وتمثل على خط الأعداد كما يلي:



العلاقات:

العلاقة:

اذا حددنا مجموعتين A و B ورابطا بين عناصر المجموعة الاولى وعناصر المجموعة الثانية نقول إننا حددنا علاقة R بين A و B اي ان R مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى A×B وتكتب $R \subseteq A \times B$

تسمي المجموعة الاولى A مجال العلاقة.

تسمي المجموعة الثانية B المجال المقابل للعلاقة.

بينما المجموعة الجزئية من المجموعة الثانية التى ترتبط عناصرها بعناصر المجموعة الاولى تسمى مدي العلاقة.

ملاحظة:

١- إذا كان $a \in A$ ، $b \in B$ بحيث يكون $(a,b) \in R$ فاننا نقول ان a مرتبط مع b ونعبر فى الغالب عن ذلك بكتابة aRb اما اذا كان $(a,b) \notin R$ فاننا نقول ان a غير مرتبط مع b وغالبا ما نعبر عن ذلك بكتابة $a \not{R} b$.

٢- فى الحالة الخاصة التى تكون فيها A=B (اي ان $R \subseteq A \times A$) فاننا نقول ان R علاقة على المجموعة A.

٣- يسمى تمثيل العلاقة فى المستوى ببيان العلاقة.

مثال:

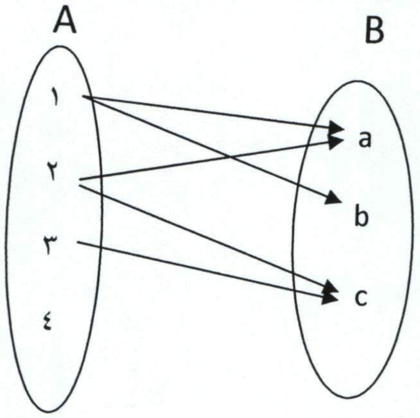
لتكن A={1,2,3,4} و B={a,b,c,d} والعلاقة R من A الى B هى:

R={(1,a),(1,b),(2,a),(2,c),(3,c)}

مجال R = {1,2,3} و مدي R={a,b,c}

ملاحظة:

اذا كانت $R \subseteq A \times B$ علاقة وكان عدد عناصر A,B صغير نسبيا فإننا يمكن ان نمثل العلاقة R باستخدام الشكل السهمى كما يلى



تعريف:

أذا كانت R علاقة من E الى F فان مجموعة الاذواج المرتبة (a,b) التى تحقق العلاقة تسمى بيان العلاقة ونرمز لها بالرمز G

مثال:

لتكن A={1,2,3,4} و لتكن R علاقة على A معرفة كالتالى

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x(y+1) \leq 6$$

اكتب بيان العلاقة

الحل:

G={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1)}

تعريف:

إذا كانت $R \subseteq A \times B$ علاقة من A الى B فاننا نعرف معكوس العلاقة ونرمز له بالرمز R^{-1} على النحو التالى

$$aR^{-1}b \Leftrightarrow bRa$$

اي ان

$$R^{-1}=\{(a,b): (b,a) \in R\}$$

مثال: إذا كانت R={(1,2),(2,3),(3,2),(1,4)} علاقة معرفة على A={1,2,3} فان

$$R^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3),(4,1)\}$$

تعريف:

اذا كانت $R \subseteq A\times B$ و $S \subseteq B\times C$ فاننا نعرف العلاقة

$SoR \subseteq A\times C$

كالتالى

$$X(SoR)y \Leftrightarrow z\in B\ (xRz\ ,\ zSy)$$

تسمى العلاقة SoR تحصيل العلاقة R على S

مثال: اذا كانت

$R=\{(2,3),(3,1),(1,2),(3,2)\}$

$S=\{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)\}$

علاقتين على المجموعة $\{1,2,3\}$ فان

$RoS=\{(1,3),(1,1),(1,2),(3,3),(2,2)\}$

$SoR=\{(2,2),(3,2),(3,3),(3,1),(1,1)\}$

$SoS=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}$

$(RoS)oS=\{(1,3),(2,3),(2,1),(2,2),(1,2),(3,2)\}$

$Ro(SoS)=\{(1,3),(2,3),(2,1),(2,2),(1,2),(3,2)\}$

لاحظ ان $RoS \neq SoR$

تعريف : لتكن R علاقة على المجموعة A عندئذ نقول ان

١- R علاقة انعكاسية (reflexive relation) اذا كان لكل $a\in A$ فانه توجد علاقة بين a و a اي ان $\forall a\in A\ (aRa)$

٢- R علاقة تناظرية او تماثليه (symmetric relation) اذا كان لكل $a\in A$ و $b\in A$ فان وجود علاقة بين aRb يؤدي الى وجود علاقة بين bRa اي ان

$$(\forall a\in A)\ (\forall b\in A)(\ aRb \rightarrow bRa)$$

٣- R علاقة متعدية او ناقلة (transitive relation) اذا كان لكل $a\in A$ و $b\in A$ و $c\in A$ فان وجود علاقة بين aRb و bRc يؤدي الى وجود علاقة بين aRc أي ان

$$(\forall a\in A)\ (\forall b\in A)\ (\forall c\in A)\ (\ aRb \wedge bRc \rightarrow bRc)$$

٤- R علاقة تكافؤ (equivalence relation) اذا كانت R انعكاسية وتناظرية و متعدية.

مثال:

لتكن $A=\{1,2,3\}$ بين أي من العلاقات التالية على A تكون علاقة تكافؤ؟

(أ) $R_1=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

(ب) $R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

(ج) $R_3=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,3),(2,2)\}$

(د) $R_4=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

الحل :

(أ) من الواضح ان R_1 تناظرية وليست انعكاسية كذلك ليست متعدية حيث $(1,2)\in R_1$ و $(2,1)\in R_1$ ولكن $(1,1)\notin R_1$ اذا R_1 ليست علاقة تكافؤ.

(ب) من الواضح ان R_2 انعكاسية و تناظرية لكن R_2 ليست متعدية لان $(1,2)\in R_2$ و $(2,3)\in R_2$ ولكن $(1,3)\notin R_2$ اذا R_2 ليست علاقة تكافؤ.

(ج) من الواضح ان R3 انعكاسية و متعدية ولكنها ليست تناظرية لان $(2,3)\in R_3$ ولكن $(3,2)\notin R_3$ اذا R_3 ليست علاقة تكافؤ.

(د) من الواضح ان R4 انعكاسية وتناظرية ومتعدية ولذا فانها علاقة تكافؤ.

تمارين

اذا كانت $R=\{(1,1),(2,3),(4,1),(3,5)\}$ و $S=\{(1,2),(3,5),(7,4)\}$ علاقتين على المجموعة $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ فاوجد

١- RoS   ٢- SoR   ٣- SoS   ٤- RoR

٥- R^{-1} ٦- (RoS)oR   ٧- Ro(SoR)

لتكن $A=\{1,2,3,4,5\}$ لكل نت العلاقات التالية على A بين فيما اذا كانت علاقة تكافؤ ام لا؟

(أ) R₁={(1,١),(٢,٢),(٣,٢),(٣,3),(3,٤),(٤,٣),(4,4),(5,5)}

(ب) $R_2=\{(1,2),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$

(ج) $R_3=\{(1,3),(1,5),(2,4),(3,1),(3,5),(4,2),(5,1),(5,3)\}$

(د) $R_4=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(4,3),(5,4)\}$

المحاضرة الثانية عشر:

الدوال و التمثيل البيانى للدوال:

الدوال:

هنا سنعرض واحدا من اهم المفاهيم الرياضية وهو مفهوم الدالة.

فإذا كانت A ، B مجموعتين فان F داله من A الى B اذا كانت F مجموعة جزئية من الجداء الديكارتى $A \times B$ بحيث انه لكل $x \in A$ توجد y واحدة $y \in B$ بحيث $(x,y) \in F$ تسمى y قيمة الدالة F عند x ويكتب ذلك رمزا على النحو $F(x) = y$ وتسمى y صورة x

فمثلا اذا كانت

$A=\{1,2,3\}$, $B= \{4,8,12\}$

فان $F_1=\{(1,4),(2,8),(3,12)\}$ دالة من A الى B وذلك لان $F_1 \subset A \times B$ وكل عنصر من A له صورة واحدة فقط من B.

اذا كانت F داله من A الى B فان A تسمى مجال الدالة F. وتسمي B المجال المقابل كما تسمى مجموعة الصور بالمدي.

فمثلا اذا كانت

$A=\{1,2\}$, $B= \{3,4,5,6\}$

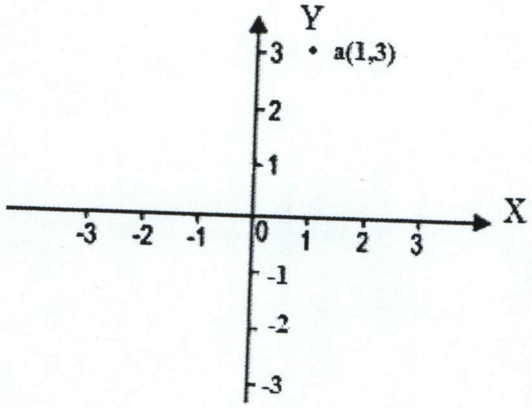
وكانت $F=\{(1,3),(2,5)\}$ فان مجموعة الصور هى $\{3,5\}$ ومن هنا فان مدي هذه الدالة هو $\{3,5\}$.

من الواضح ان الدالة F تتحدد بمعرفة مجالها A او بمعرفة الصور $F(x)$ لكل $x \in A$

نستطيع للاختصار ان نقول ان: $F(x) = x^2$ حيث x عدد حقيقي هي الدالة $F=\{(x,x^2): x$ عدد حقيقى$\}$ لهذا من الان فصاعدا سوف نستعمل الصيغة $F(x)$حيث $x \in A$ لوصف الدالة دون كتابتها على شكل ازواج مرتبة ودون ذكر المجال المقابل.

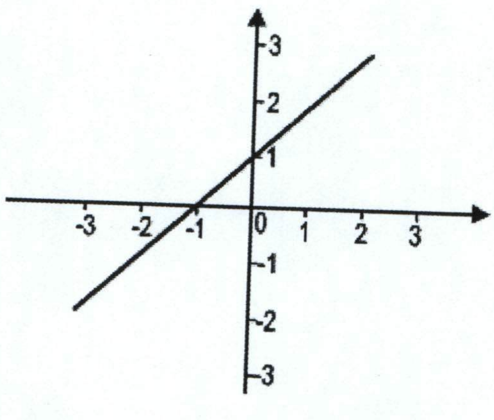
التمثيل البياني للدوال

من انسب طرق تمثيل الدوال هو اسلوب التمثيل البيانى.



اولا: نرسم محورين متعامدين ونضع تدريجا مناسبا على كل منهما كما فى الشكل. يسمي المحور الافقى محور X والمحور الراسي محور Y وتسمى نقطة تقاطع المحورين نقطة الاصل واتفق ان توضع القيم الموجبة ل X على يمين نقطة الاصل والقيم السالبة على يسارها كما اتفق ان توضع القيم الموجبة ل Y فوق نقطة الاصل والقيم السالبة تحتها ويسمى السطح الناتج بالمستوي البيانى. من الملاحظ ان اي زوج مرتب من الاعداد الحقيقية يحدد نقطة واحدة فى المستوى البيانى فمثلا الزوج (1,3) يحدد النقطة a كما فى الشكل السابق.

مثال: ارسم بيان (منحنى) الدالة $F(x) = x+1$



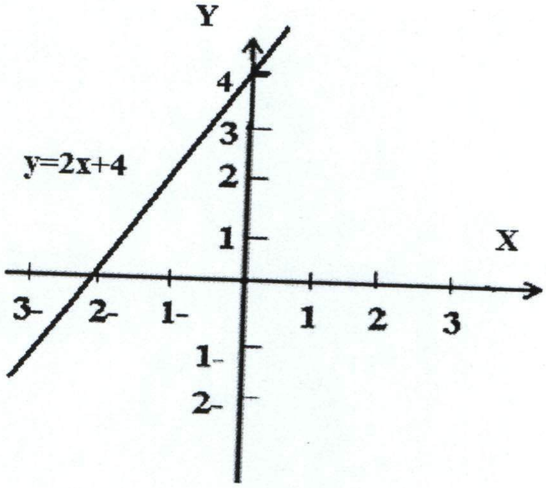
من الواضح ان الدالة $F(x)= y = x+1$ تتحقق بعدد لانهائي من الازواج المرتبة (x ,y) ولكن نكتفى ببعض الازواج التى تحقق $y = x+1$ كما فى الجدول

x	٠	١	-١	٢
Y=F(x)	١	٢	٠	٣

هذا الجدول يحدد الازواج (0,1)،(1,2)،(-1,0)،(2,3) من الشكل يتضح ان هذه النقط تقع على خط مستقيم واحد ويسمى هذا الخط بيان الدالة $y = x+1$

مثال : مثال: ارسم بيان (منحنى) الدالة

$F(x) = 2x+4$

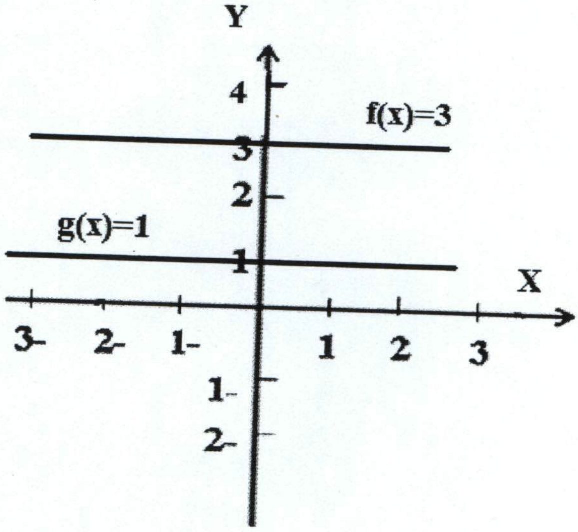


x	٠	١	-1	-2
Y=F(x)	4	6	2	0

هذا الجدول يحدد الازواج (0,4)،(1,6)، (-1,2)،(-2,0) من الشكل يتضح ان هذه النقط تقع على خط مستقيم واحد ويسمى هذا الخط بيان الدالة $y = 2x+4$

الدالة الخطية:

تسمى G دالة ثابتة اذا كان مدي هذه الدالة مجموعة مكونة من عنصر واحد فقط.
فمثلا اذا كانت $G(x)=3$ حيث x عدد حقيقى فان هذا يعنى انه مهما كانت قيمة x فان قيمة $G(x)=3$ فمثلا $G(0)=3$ و $G(1)=3$ و $G(-5)=3$ وهكذا



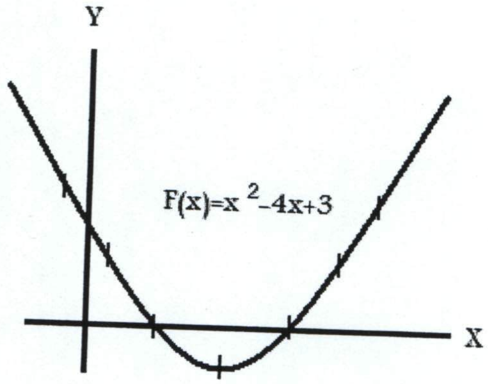
ومن الواضح ان بيان اي دالة ثابتة هو خط مستقيم فى الشكل المقابل
$F(x)=3$ خط مستقيم يوازي محور X ويقطع محور Y فى النقطة (0,3)
$F(x)=1$ خط مستقيم يوازي محور X ويقطع محور Y فى النقطة (0,1)

وبشكل عام ان اي دالة على الصيغة $F(x)= a x + b$ حيث a ,b اعداد حقيقية تمثل خطا مستقيما لهذا تسمى دالة خطية.

الدالة التربيعية :

تسمي الدالة $F(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a\neq0$ ، a, b, c أعداد حقيقية ثابتة وحيث س عدد حقيقى دالة تربيعية.

مثال : $F(x)= x^2-4x+3$ داله تربيعية فاذا اردنا رسم منحنى هذه الدالة نكون جدولا ببعض الازواج المرتبة التى تحقق هذه الدالة كما يلى.



ثم نقوم بتعيين النقاط التى تقابل هذه

x	-1	٠	١	2
Y=F(x)	8	٣	0	-1

الازواج كما يظهر فى الشكل المقابل من الواضح ان هذه النقط لا تقع على خط مستقيم. يسمى المنحنى الذي يظهر فى الشكل قطعا مكافئا.

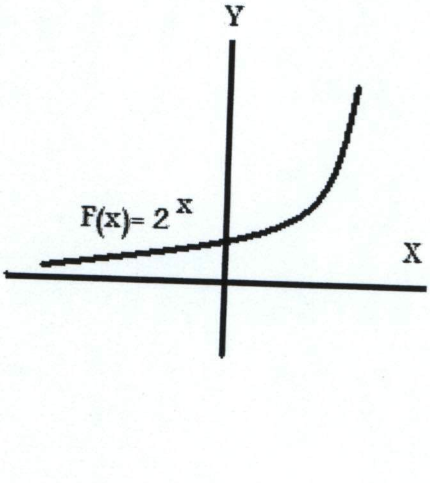
الدالة الاسية :

ليكن a عددا حقيقيا حيث $a > 0$ و $a \neq 1$ ولنعرف الدالة $F(x)=a^x$ حيث x عدد حقيقي. تسمى دالة أسية.

مثال : ارسم منحنى الدالة $F(x)=2^x$ حيث x عددا حقيقيا .

x	٠	١	٢	٣	-1	-2	-3
Y=F(x)	1	٢	٤	٨	1/2	1/4	1/8

نكون جدولا ببعض الازواج التى تحقق هذه الدالة.
ثم نعين النقط التى تقابل هذه الازواج فى المستوي البيانى ونصل بينها بخط املس لنحصل على الشكل المقابل

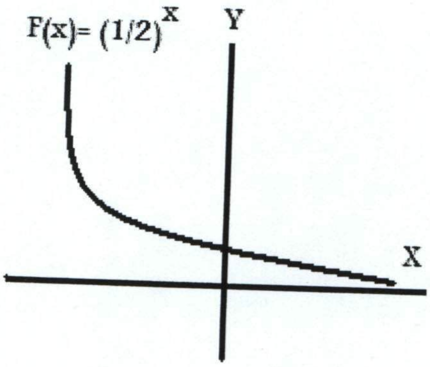


مثال : ارسم منحنى الدالة $F(x)=(1/2)^x$ حيث x عددا حقيقيا .
بنفس الاسلوب نجد نكون جدولا ببعض الازواج التى تحقق هذه الدالة.

x	٠	١	٢	٣	-1	-2	-3

Y=F(x)	1	1/2	1/4	1/8	2	4	8

ثم نعين النقط التى تقابل هذه الازواج فى المستوي البيانى ونصل بينها بخط املس لنحصل على الشكل المقابل الذي يمثل منحنى هذه الدالة.



تمارين

١- اي من المجموعات التالية تمثل دالة على المجموعة $A=\{-1,1,5\}$

أ- $\{-1,1,5\}$

ب- $\{(-1,1),(1,5)\}$

ت- $\{(-1,-1),(1,1),(5,5)\}$

ث- $\{(-1, 0),(1,2),(5,1)\}$

ج- $\{(-1, 1),(-1,5),(1,5)\}$

٢- اذا مثلت المجموعات التالية دوالا فاوجد مجال ومدي كل منها.

أ- $\{(-1,0),(-2,-1),(0,5)\}$

ب- $\{(-1,-3),(-3,-1)\}$

ت- $\{(0,-1),(-1,2),(3,5)\}$

ث- $\{(0,1),(2,1),(7,1),(9,1),(-10,1)\}$

٣- ارسم منحنى الدالة $F(x)=x^2-3x+2$

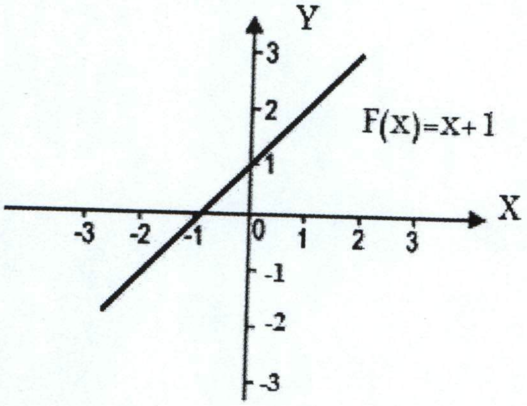
المحاضرة الثالثة عشر:

النهايات و الاتصال:

النهايات :

درست فى المحاضرات السابقة كثيرات الحدود و بعض الدوال الخاصة وكيفية تمثيلها بيانيا لاحظ التمثيل البيانى للدالة $F(x)=x+1$

هل يمكنك ان تعرف سلوك الدالة د(س) عندما يقترب المتغير س من قيمة معينة؟



فمثلا :عندما $x=1$ استعن بالجدول التالي و الرسم المقابل

يقترب من اليسار ⟵ 1 ⟶ يقترب من اليمين

x	٠,٩٨	0.99	0.999	0.9999		1.0001	1.001	1.01
F(x)	1.89	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.01

⟶ 2 ⟵

F(x) المقابلة

يبين الجدول السابق قيم x القريبة من العدد ١ وقيم $F(x)$ المقابلة لكل منها ونلاحظ ان كلما اقتربت x من العدد ١ (باخذ قيم اكبر او قيم اقل) اقتربت قيمة $F(x)$ من العدد ٢ وفى هذه الحالة تكون نهاية $F(x)$ تساوي ٢ عندما تقترب x من العدد ١ ونعبر عن ذلك بـ

$$Lim_{x\to 1} F(x)=2$$

وتقراء نهاية الدالة F(x) عندما تقترب x الى ١ تساوي ٢

اما الداله $F(x)=(x-2)^2$ عندما $x=2$

نستعن بالجدول و الرسم المقابل حيث

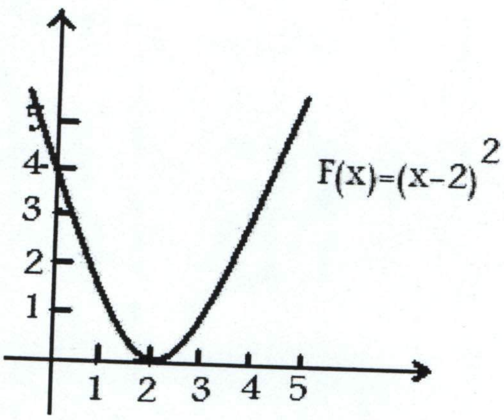
نلاحظ انه كلما اقتربت x من العدد ٢

اقتربت قيمة F(x) من الصفر اذا نهاية

الدالة F(x) تساوي صفر عندما يقترب x

من العدد ٢ ويرمز لذلك بالرمز

$$Lim_{x\to 2} F(x)=0$$



يقترب من اليسار ⟵ 2 ⟶ يقترب من اليمين

x	١,٩٨	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.01
F(x)	0.0004	0.0001	0.000001	0.00000001		0.00000001	0.000001	0.0001

⟶ ٠ ⟵

المقابلة F(x)

بينما الداله $F(x)=\dfrac{x-1}{x-1}$ عندما $x=1$

نجد ان $F(1)=\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ وهذه تمثل كمية غير معينة او ان ليس لها معنى

واذا كانت $x\neq 1$ فان $F(x)=1$.

لذلك نرغب فى دراسة سلوك الداله F(x) عندما تقترب من ١ ولا تساوي ١.

ولهذا يجدر بنا دراسة الجدول التالي

X<1	قيم F(x)	x>1	قيم F(x)
٠,٥	١	١,٠٥	١
٠,٩	١	١,٠١	١
٠,٩٩	١	١,٠٠١	١
٠,٩٩٩	١	١,٠٠٠١	١

نلاحظ اذا اقتربت x من ١ بقيم اقل من ١

فان F(x) تقترب من ١ و الواقع فى هذا

المثال انها تساوي ١ دائما.

ونقول ان نهاية F(x) من اليسار تساوي

١ عندما x تقترب من ١ من اليسار

ونكتب

$$Lim_{x\to 1^-} F(x)=1$$

كما انه اذا اقتربت x من ١ بقيم اكبر من ١ فان F(x) تقترب من ١ ايضا لذلك نقول ان نهاية

F(x) من اليمين تساوي ١ عندما x تقترب من ١ من اليمين ونكتب

$$Lim_{x\to 1^+}\ F(x)=1$$

وبصورة عامة اذا اقتربت F(x) من m عندما تقترب x من a من اليمين واليسار نقول ان

$$Lim_{x\to a}\ F(x)=m$$

مثال:اوجد $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

الحل: لاحظ ان x=3 ليست فى مجال الدالة

بما ان $x \to 3$ تعنى ان $x \neq 3$ اي $x > 3$ او $x < 3$

فان $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)$

ولايجاد هذه النهاية نكون الجدول التالى الذي يعطى سلوك الدالة

F(x) عندما $x\to 3^+$ ، $x\to 3^-$

قيم F(x)	x>3	قيم F(x)	X< 3
٦,٠١	3.01	٥,٩	2.9
٦,٠٠١	٣,٠٠١	٥,٩٩	٢,٩٩
٦,٠٠٠١	٣,٠٠٠١	٥,٩٩٩	٢,٩٩٩
٦,٠٠٠٠١	٣,٠٠٠٠١	٥,٩٩٩٩	٢,٩٩٩٩

ومن هنا نلاحظ ان

$$\lim_{x\to 3}F(x)=6$$

بينما F(3) غير معرفة

جبر النهايات:

من الجدير بالذكر ان ايجاد النهاية عن طريق الجدول عملية صعبة لهذا فإننا نضع بعض الملاحظات والاساليب التى تساعد على ايجاد النهايات.

أ) اذا كانت F(x) كثيرة حدود مثل $F(x)=3x^4+5x+8$

فان $\boxed{\lim_{x\to a}F(x)=F(a)}$

*مثال:*اوجد $\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)$

الحل: بما ان $3x^3+5x^2-7$ *كثيرة حدود فان*

$$\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)=3(2)^3+5(2)^2-7=24+20-7=37$$

ب) اذا كانت $F(x)$ دالة نسبية اي انها خارج قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود اخري اي

انها على الصورة $F(x)=\frac{G(x)}{Z(x)}$ وكانت $\lim_{x\to a} Z(x)\neq 0$ فإن

$$\boxed{\lim_{x\to a} F(x)=\frac{\lim_{x\to a} G(x)}{\lim_{x\to a} Z(x)}=\frac{G(a)}{Z(a)}=F(a)}$$

مثال: اوجد $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}$

الحل: بما ان $\lim_{x\to 3}(x-5)=3-5=-2\neq 0$

اذا $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}=\frac{3(3)^2+7}{3-5}=\frac{27+7}{-2}=-17$

ت) اذا كانت $\lim_{x\to a} F(x)=L$ وكان C ثابت فإن

$$\boxed{\lim_{x\to a} C^{F(x)}=C^L}$$

مثال: اوجد $\lim_{x\to 2} e^X$ حيث العدد $e=2.71828...$ هو اساس اللوغاريتم الطبيعى

الحل: بما ان $\lim_{x\to 2} x=2\neq 0$

اذا $\lim_{x\to 2} e^X=e^2$

ث) اذا كانت $\lim_{x\to a} F(x)=L$

فان $\boxed{\lim_{x\to a}(F(x))^n=L^n}$

مثال: اوجد $\lim_{x\to 1}(3x^2+4x-2)^8$

الحل: بما ان $\lim_{x\to 1}(3x^2+4x-2)=3(1)^2+4(1)-2=3+4-2=5$

اذا $\lim_{x\to 1}(3x^2+4x-2)^8=(5)^8$

ج) اذا كانت $\lim_{x\to a} F(x)=L$ فإن

$$\boxed{\lim_{x\to a}\sqrt[n]{F(x)}=\sqrt[n]{L}}$$

مثال: اوجد $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$

الحل: بما ان $\lim_{x\to 2}(x^2+5)=4+٥=٩$

فإن $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}=\sqrt[3]{9}$

<u>تمارين</u>

اوجد النهايات التالية اذا وجدت

١- $\lim_{x\to 2}(x+1)$

٢- $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)$

٣- $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

٤- $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}$

٥- $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}$

المحاضرة الرابعة عشر:

النهايات و الاتصال:

الاتصال:

نقول ان الدالة $Y=F(x)$ متصلة عند نقطة a اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية

١- $F(a)$ معرفة

٢- $\lim_{x\to a} F(x)$ موجودة

٣- $\lim_{x\to a} F(x)=F(a)$

واذا لم يتحقق احد الشروط الثلاثة فنقول ان الدالة غير متصلة عند a .

وتكون الدالة متصلة فى فترة s اذا كانت متصلة عند جميع النقط الواقعة فى هذه الفترة.

مثال: اثبت ان الدالة

$$F(x) = \begin{cases} x\ , & x\neq 1 \\ 2\ , & x=1 \end{cases}$$

غير متصلة عند $x=1$

الحل: ١- $F(1)=2$ من تعريف الدالة

٢- $\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1} x = 1$

٣- ولكن $\lim_{x\to 1}F(x) \neq F(1)$ فتكون الدالة غير متصلة عند $x=1$

جبر الاتصال:

١- اذا كانت $F(x)$ كثيرة حدود مجالها R فانها متصلة عند $x=a$ لكل $a\in R$

٢- اذا كانت G,Z دالتين متصلتين عند $x=a$ فان

$(G+Z)$ ، $(G-Z)$ متصلتين عند نفس النقطة $x=a$

$Z\times G$ متصلة ايضا عند نفس النقطة $x=a$

و $\frac{G}{Z}$ متصله عند $x=a$ حيث $Z(a)\neq 0$

٢- $F(x) = \sqrt{x}$

٣- $F(x) = \dfrac{1}{x+1}$

٤- $F(x) = \dfrac{1}{x-1}$

٥- $F(x) = x^2 + 5$

٢- ابحث فى اتصال الدوال التالية عند النقط المذكورة

أ- $F(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ عند x=2

ب- $F(x) = 3x+2$ عند x=-2

ج- $F(x) = \dfrac{(x^2+2x+3)}{(x-1)}$ عند x=1

٣- $F(x) = \begin{cases} ٢x-3 , & x \neq 3 \\ 2 , & x=3 \end{cases}$

ابحث فى اتصال الداله السابقة عند x=3

مثال: اثبت ان الدالة $F(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ غير متصلة عند x=-1

الحل:

بما ان $\frac{0}{0}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=F(-1)$ حيث ٠/٠ كمية غير معينة او غير معرفة فتكون الدالة F(x) غير متصلة عند x= -1

مثال: اثبت ان الدالة F(x)=x متصلة عند x=2

الحل:

١- $F(2)=2$

٢- $\lim_{x\to 2} F(x) = \lim_{x\to 2} x = 2$

٣- $\lim_{x\to 2} F(x) = F(2)$

اذا الدالة متصلة عند x=2

مثال: اثبت ان الدالة التالية متصلة عند x=0

$$F(x)=\begin{cases} x\ , & x\geq 1 \\ -x\ , & x<1 \end{cases}$$

الحل: ١- $F(0)=0$ من تعريف الدالة

٢- $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\lim_{x\to 0} x = 0$

$\lim_{x\to 0^-} F(x)=\lim_{x\to 0} -x = 0$

اذا $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$

٣- $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$

ولهذا فان F(x) دالة متصلة عند x=0

<u>تمارين</u>

١- ابحث اتصال الدوال التالية عند x=1

١- $F(x)=\frac{1}{2}x$

المحاضرة الخامسة عشر:

مقدمة فى حساب التفاضل:

مشتقات الدوال: متوسط التغير

اذا كانت $F(x)=y$ داله وكانت x_1 وx_2 نقطتين فى مجال هذه الداله فان المقدار x_2-x_1 يسمى التغير فى x ويرمز له بالرمز $\triangle x = x_2-x_1$ وتقرأ (دلتا x) كما يسمى المقدار $F(x_2)-F(x_1)$ التغير فى الداله ويرمز له بالرمز

$$\triangle y = y_2-y_1=F(x_2)-F(x_1)$$

كما يسمى الكسر:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

متوسط التغير فى الداله عندما تتغير x من x_1 الى x_2

مثال: اذا كانت $F(x)=x^2+5$ فاوجد متوسط التغير فى هذه الداله عندما تتغير x من ١ الى ٢.

الحل: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{(4+5)-(1+5)}{2-1}=\frac{9-6}{1}=3$

مفهوم المشتقة:

درسنا فى المحاضرات السابقة مفهوم النهايات وسنحاول الان تطبيق هذا المفهوم لنعرف ما يسمى بمشتقة الداله.

ان المشتقة للداله $F(x)$ نرمز لها بـ $F'(x)$ عند النقطة $(a , F(a))$ هى

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-F(a)}{x-a}$ بشرط ان تكون النهاية موجودة. اي ان المشتقة هى نهاية متوسط التغير عندما $\triangle x \to 0$ لهذا فهى تسمي معدل التغير فى الداله.

مثال: اذا كانت $f(x)=x$ اوجد $f'(1)$

الحل: $f'(1)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1$

مثال: اذا كانت $f(x)=x^2$ اوجد $f'(a)$

الحل: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}x+a=2a$

جبر الاشتقاق:

الان يمكن حساب المشتقات بالاعتماد بعض قواعد الاشتقاق التى نعرضها كمايلى

أ) $\boxed{\text{اذا كانت } Y= x^n \text{ فان } \dfrac{dY}{dx} = n\,x^{n-1} \text{ حيث } n \text{ عدد حقيقي.}}$

مثال: اوجد مشتقة الدوال الاتية $Y=x^5$ **و** $Y=\dfrac{1}{x^2}$

الحل : $Y = x^5$ **اذا** $\dfrac{dY}{dx} = 5\,x^{5-1} = 5x^4$

$Y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ **اذا** $\dfrac{dY}{dx} = -2\,x^{-2-1} = -2x^{-3}$

ب) $\boxed{\text{اذا كانت } Y= k \text{ (حيث } k \text{ كمية ثابتة) فان } \dfrac{dY}{dx} = \dfrac{d}{dx}k = 0}$

مثال: اوجد مشتقة الدالة $Y = \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$

الحل: $\dfrac{dY}{dx} = 0$ حيث ان Y مقدار ثابت

ت) $\boxed{\text{اذا كانت } Y= k\,X^n \text{ فان } \dfrac{dY}{dx} = k\dfrac{d}{dx}X^n \text{ حيث } k \text{ عدد ثابت}}$

مثال: اوجد مشتقة الداله الاتية $Y=3x^5$

الحل : $Y = 3x^5$ **اذا** $\dfrac{dY}{dx} = 3(5\,x^{5-1}) = 15x^4$

ث) المشتقة لمجموع عدة دوال بالنسبة لمتغير مستقل تساوي مجموع المشتقات لهذه الدوال بالنسبه لنفس المتغير.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(Y+Z) = \frac{d}{dx}Y + \frac{d}{dx}Z}$$

مثال: اوجد مشتقه الداله $Y=x^5-2x^2+x+27$

الحل : $\dfrac{dY}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^5 - 2x^2 + x + 27) = 5x^4 - 4x + 1$

ج) مشتقة حاصل ضرب دالتين=الدالة الاولى×مشتقة الداله الثانية+الداله الثانية×مشتقة لداله الاولى

$$\boxed{\frac{d}{dx}(Y * Z) = Y\frac{d}{dx}Z + Z\frac{d}{dx}Y}$$

مثال: اوجد مشتقه الداله $Y=(x^2-3)(x+2)$

الحل :

$$\frac{d}{dx}(x^2-3)(x+2) = (x^2-3)\frac{d}{dx}(x+2) + (x+2)\frac{d}{dx}(x^2-3) = 3x^2+4x-3$$

ح) مشتقة خارج قسمة دالتين =(المقام ×مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام)÷ مربع المقام

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{Y}{Z}\right) = \frac{Z\frac{dY}{dx} - Y\frac{dZ}{dX}}{Z^2}}$$

مثال: اوجد مشتقه الداله $Y=(2x^2-3)/(x+1)$

الحل :

$$\frac{d}{dx}\frac{(2x^2-3)}{(x+1)} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2x^2-3) - (2x^2-3)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(4x)-(2x^2-3)(1)}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+4x-2x^2+3}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$$

خ) اذا كانت $Y=f_1(m)$ ، $m=f_2(x)$ فان

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} * \frac{dm}{dx}}$$

تعرف هذه القاعدة بـ قانون السلسلة

مثال: اوجد المشتقه للداله $Y=(3x^2+2x-4)^{٣}$

الحل :

نفرض ان $m=3x^2+2x-4$ اذا $Y=m^3$

ولهذا فان $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dm} * \dfrac{dm}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 3m^2(6x+2) = 3(3x^2+2x-4)^2(6x+2)$$

د) قد يحدث فى بعض الاحيان ان تكون العلاقة بين المستقل x و المتغير التابع y غير صريحة. وفى هذه الحالة تكون الدالة على الصورة F(x,y) = c حيث c مقدار ثابت. ولايجاد المشتقة لهذه الداله نجري عملية التفاضل بالنسبة الى س لجميع المتغيراتعلى طرفى المعادلة ويسمي هذا الاشتقاق الضمنى.

مثال: اوجد المشتقه للداله $x^2 + Y^2 = 10$

الحل:

نجري عملية التفاضل بالنسبة الى x

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

اذا $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$

ملاحظة:

ان مشتقة الداله هى داله أخري لهذا يمكن ان نشتق مره ثانية فنحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية فمثلا اذا كانت

$$F(x)=x^5+3x^4+9$$

فان مشتقة F هى $F'(x)= 5x^4+12x^3$

وهذه الداله يمكن اشتقاقها للحصول على المشتقة الثانية والتى نرمز لها بالرمز

$$F''(x)=٢٠X^3+36x^2$$

واحيانا نستخدم الرمز $\dfrac{d^2F}{dx^2}$ ليرمز للمشتقة الثانية

تمارين

١- استعمل تعريف المشتقة (المبادئ)لايجاد مشتقة كل من الدوال التالية

Y=2

Y=2-3x

$Y=(x-1)^2$

٢- اوجد متوسط التغير لكل من الدوال التاليةعندما تتغير x من ٢ الى ٣

F(x)=x

$F(x)=x^2+4x+5$
$F(x)=x^3$
$F(x)=1/x$

٣- اوجد المشتقة للدوال التالية

$Y=x+1$
$Y=(x^2+2x+3)(x^2+1)$
$Y=(2x+1)/(3x+2)$
$Y=x^2-4x+1$

٤- اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت

$Y=g^3-2g \;,\; g=x^2-5x+6$
$4x^2+xy-3y^2=0$
$2x^2-y^2+x=4$

٥- اوجد المشتقة الثانية للدوال التالية

$F(x)=8x^7+-4x^6-9x^2+5$
$F(x)=(3x+7)(2x-9)$

المحاضرة السادسة عشر:

مقدمة فى حساب التكامل

مفهوم التكامل غير المحدود:

تعلم ان هناك الكثير من العمليات المتعاكسة، فالطرح عكس الجمع والقسمة عكس الضرب والرفع للاسس عكس اخذ الجذور ، اللوغريتمات عكس الاسس.

من التفاضل تعرف كيف تجد المشتقة $F'(x)$ للداله $F(x)$ والسؤال الذي ينشأ الان هو اذا علمت المشتقة $F'(x)$ فكيف يمكن ايجاد الداله الاصلية $F(x)$ ؟

فمثلا اذا اعطينا ان $\frac{dY}{dx} = X^3$ وطلب ان نجد Y بدلالة x .

نلاحظ انه اذا كانت $Y = \frac{x^4}{4} + 6$

فان $\frac{dY}{dx}$ او $Y'=x^3$

وكذلك اذا كانت $Y = \frac{x^4}{4} + c$ حيث c اي عدد ثابت فان $Y'=x^3$

تسمى عملية ايجاد Y اذا علمت مشتقتها Y' بعملية التكامل فنقول ان $\frac{1}{4}x^4 + c$ هى تكامل x^3 بالنسبة الى x ونكتبها

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

حيث ترمز العلامة $\int$ الى عملية التكامل ، dx تعنى بالنسبة للمتغير المستقل x كما يسمى c ثابت التكامل

ويسمى $\int f(x)dx$ بالتكامل غير المحدود

قوانين التكامل:

وفيما يلى بعض القوانين التى تساعدنا فى ايجاد التكاملات.

١- $$\boxed{\int dx = x + c}$$

مثال: $\int 5dx = 5x + c$

٢- $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad , n \neq -1}$

مثال: $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + 4x + c$

٣- $\boxed{\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \quad \text{حيث } a \text{ ثابت}}$

٤- $\boxed{\int [F(x)+G(x)]dx = \int F(x)dx + \int G(x)dx}$

مثال: $\int (7x+3)dx = 7\frac{x^2}{2} + 3x + c$

مثال:

$$\int (\frac{x^6 + 2x^2}{x^2})dx = \int (\frac{x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2})dx = \int (x^4 + 2)dx = \frac{x^5}{5} + 2x + c$$

٥- $\boxed{\int e^x dx = e^x + c}$

٦- $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c}$

٧- $\boxed{\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c}$

٨- $\boxed{\int \cos(x)dx = \sin(x) + c}$

مثال: $\int (4e^{x} + \frac{1}{x})dx = 4e^{x} + \ln x + c$

مثال: $\int (3x^{-2} + 4x^{-1} + 5)dx = \frac{3x^{-1}}{-1} + 4\ln x + 5x + c$

مثال:

$$\int (3\sin(x) + 2x)dx = -3\cos(x) + 2\frac{x^{2}}{2} + c = -3\cos(x) + x^{2} + c$$

مثال: $\int (\sin(x) + \cos(x))dx = -\cos(x) + \sin(x) + c$

التكامل بالتعويض:

فى كثير من الحالات قد نواجه مسائل يطلب فيها ايجاد التكامل

$$\int (f(x))^{n} G(x)dx$$

حيث n عدد حقيقى

فاذا فرضنا $Y=f(x)$ فان تفاضله Y هى $dy=f'(x)dx$ واذا حدث وان كانت $f'(x)=aG(x)$ حيث a ثابت فان

$$\int (f(x))^{n} G(x)dx = \frac{1}{a}\int Y^{n}dy$$

وهذا التكامل يمكن حسابه. يسمى هذا الاسلوب فى ايجاد التكامل اسلوب التكامل بالتعويض.

مثال: اوجد $\int (x+1)^{5}dx$

الحل:

نفرض ان $x+1= g$ فيكون $dx=dg$

$$\int (x+1)^{5}dx = \int g^{5}dg = \frac{g^{6}}{6} + c$$

$$= \frac{(x+1)^{6}}{6} + c$$

مثال: اوجد $\int (x^{2}+1)^{3} x dx$

الحل:

نفرض ان $x^{2}+1= g$ فيكون

$2xdx=dg$

اذا $dx=dg/2x$

بالتعويض

$$\int (x^2+1)^3 x dx = \int \frac{g^3}{2} dg = \frac{1}{2}\int g^3 dg = \frac{g^4}{2\times 4} + c = \frac{1}{8} g^4 + c$$

$$= \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$$

مثال: اوجد $\int \sin(x)\cos(x)dx$

الحل:

نفرض $Y=sin(x)$

اذا $dy=cos(x)dx$ ومنها $dx= dy/cos(x)$

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \int Y dy = \frac{Y^2}{2} + c$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$$

مثال: اوجد $\int e^{-3x} dx$

الحل:

نفرض $Y=-3x$

اذا $dy=-3dx$ ومنها $dx= dy/-3$

بالتعويض

$$\int e^{-3x} dx = \int \frac{e^y}{-3} dy = -\frac{1}{3} e^y + c$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x} + c$$

مفهوم التكامل المحدود:

اذا كانت $G(x)$ تحقق $G'(x)=f(x)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدود للدالة $F(x)$ على الفترة $[a , b]$

مثال: اوجد $\int_{1}^{2}(x^2+1)dx$

الحل:

$$\int_{1}^{2}(x^2+1)dx=\int_{1}^{2}x^2dx+\int_{1}^{2}1dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2+\left[x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}(2^3-1^3)+(2-1)=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$$

مثال: اوجد $\int_{0}^{2}(x+1)^3dx$

الحل:

نفرض ان $y=x+1$ فيكون $dy=dx$

وعندما $x=0$ تكون $y=1$

وعندما $x=2$ تكون $y=3$

بالتعويض

$$\int_{0}^{2}(x+1)^3dx=\int_{1}^{3}Y^3dy=\left[\frac{Y^4}{4}\right]_1^3=\frac{1}{4}(3^4-1^4)=\frac{1}{4}(81-1)=20$$

خواص التكامل المحدود:

أ) $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$ **اي ان التكامل عند نقطة يساوي صفر**

ب) $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$

ج) $\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{b}^{c}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx$

مثال: اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x+4 & , 0\le x\le 2\\ 5 & , 2<x\le 3\end{cases}$

اوجد $\int_0^3 f(x)dx$

الحل:

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f_1(x)dx+\int_2^3 f_2(x)dx=\int_0^2(3x+4)dx+\int_2^3 5dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2+4x\right]_0^2+[5x]_2^3=(\frac{3}{2}(2)^2+4(2))-(0)+((5\times 3)-(5\times 2))$$

$$=6+8+5=19$$

تمارين

١- اوجد $\int(\frac{x^5+2x^2+1}{x^2})dx$

٢- اوجد $\int(x^{-2}+2\sin x+3\sqrt{x})dx$

٣- اوجد بستخدام التكامل بالتعويض

$$\int x^2(x^3+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\int\frac{1}{(3x+2)^2}dx$$

$$\int(3x-5)^4dx$$

$$\int\sin^2(x)\cos(x)dx$$

$$\int xe^{x^2}dx$$

٤- احسب التكاملات التالية

$$\int_1^2\frac{dx}{x^3}$$

$$\int_0^2 xdx$$

$$\int_{1}^{3}(x^2 + x)dx$$

$$\int_{0}^{1}(x^2 + 2x - 1)dx$$

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$$

$$\int_{0}^{3}(2x - 3)dx$$